

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 39

September/November

Heft 9/11

Wissenschaftliche Jahrestagung der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik in Hannover (19.–23. Mai 1959)

Die diesjährige wissenschaftliche Jahrestagung der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik (GAMM) fand vom 19. bis 23. Mai an der Technischen Hochschule Hannover unter der örtlichen Tagungsleitung von Herrn Prof. Dr. Quade statt. Nach einem zwanglosen, sehr gut besuchten Begrüßungsabend am Dienstag wurde sie am Mittwoch vormittag durch den Vorsitzenden, Herrn Prof. Dr. Sauer, eröffnet. Dabei wurde auch der seit der letzten Jahrestagung verstorbenen Mitglieder, insbesondere des stellvertretenden Vorsitzenden Prof. Dr. Fr. A. Willers ehrend gedacht.

Die Tagung spiegelte nicht nur, was die Zusammensetzung und den Umfang des Teilnehmerkreises, sondern auch, was die gebotenen Vorträge angeht, von neuem die wachsende Bedeutung der von der GAMM gepflegten Wissenschaftszweige und ihre starke internationale Verflechtung wider. Das Teilnehmerverzeichnis wies nahezu 500 Namen, darunter 58 aus dem Ausland auf.

Auf Einladung der Gesellschaft wurden in den gemeinsamen Vormittagssitzungen folgende zusammenfassenden Vorträge gehalten:

- M. Strutt: Über einige Grundlagen und Anwendungen der Schaltalgebra
- K. Samelson: Der Stand der Entwicklung des Maschinenrechnens
- K. Magnus: Nichtlineare Probleme der Regelungstheorie
- J. Mikusiński: Operatorenrechnung und ihre Beziehungen zur modernen Mathematik
- H. Görtler: Neuere Fortschritte der hydrodynamischen Stabilitätstheorie
- G. Ludwig: Grenzschichtströmungen zweiatomiger Gase bei hohen Machzahlen
- A. C. Zaanen: Die Evolution des Integralbegriffs
- W. Olszak: Über neue Entwicklungsrichtungen in der Plastizitätstheorie
- F. Schultz-Grunow: Rheologie der Suspensionen

Herr Tricomi war leider am Erscheinen verhindert. Dankenswerterweise hat er den von ihm vorbereiteten Vortrag zur Veröffentlichung in diesem Heft zur Verfügung gestellt.

In den Nachmittagssitzungen, die wie üblich sektionsweise aufgeteilt waren, wurden über 75 Vorträge, überwiegend von Nachwuchskräften gehalten. Sie hinterließen nach allgemeinem Urteil den Eindruck eines beachtlichen wissenschaftlichen Niveaus.

In den Rahmen der Tagung eingebaut war am Donnerstag nachmittag die gemeinsam mit der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt (WGL) veranstaltete, feierlich umrahmte Ludwig-Prandtl-Gedächtnisvorlesung, die

Herr Prof. Dr. M. Roy (Paris) über
„Die Bildung von Wirbelzonen in Strömungen mit geringer Zähigkeit“

hielt und durch überaus eindrucksvolle Filme ergänzte.

Über die am Freitag vormittag durchgeführte Mitgliederversammlung wird anschließend gesondert berichtet.

Nicht nur über den wissenschaftlichen, sondern auch über den von der örtlichen Tagungsleitung mit großer Sorgfalt und Umsicht vorbereiteten gesellschaftlichen Veranstaltungen, dem Begrüßungsabend, dem geselligen Abend, den Damenveranstaltungen und nicht zuletzt der abschließenden, von prachtvoller Wetter begünstigten Fahrt ins Weserbergland ruhte die von allen Teilnehmern immer wieder als wohltuend empfundene sympathische GAMM-Atmosphäre. Herrn Professor Quade und seinen Mitarbeitern gebührt für die hervorragende Vorbereitung und Durchführung der Tagung der wärmste Dank.

Heinrich

Bericht über die Tätigkeit der GAMM im vergangenen Jahr und Ergebnisse der ordentlichen Hauptversammlung in Hannover am 22. Mai 1959

A. Tätigkeit der Fachausschüsse:

- I. Der Fachausschuß für die Ausbildung der Diplom-Mathematiker,
Leiter: Dir. Dr.-Ing. Alfred Siemens
hielt in diesem Jahr keine eigene Veranstaltung ab.
- II. Der Fachausschuß für Fragen der Lehrplangestaltung an den Technischen Hochschulen,
Leiter: Prof. Dr.-Ing. Fritz Schultz-Grunow
wurde aufgelöst.

- III. Fachausschuß für Programmieren,
Leiter: Prof. Dr. Josef Heinhold

Es wurde ein Fachwörterbuch programmierungstechnischer Termini erstellt, das mit Unterstützung des Stifterverbandes der deutschen Wissenschaft beim Verlag Oldenbourg, München, gedruckt wird und in nächster Zukunft vorliegen wird.*)

In Zusammenarbeit mit einem Ausschuß der Association for Computing Machinery (ACM) wurde ein Vorschlag für eine einheitliche, als Grundlage für maschinelle Formelübersetzungssysteme brauchbare Formelsprache ausgearbeitet und publiziert. (Z. Num. Math., 1, S. 41—60 (1959), Comm. ACM Bd. 1, Heft 12, S. 8—22 (1958)).

Die GAMM nimmt den Bericht ihres Programmierungs-Ausschusses über das unter internationaler Beteiligung zustande gekommene Ergebnis der Konferenzen in Zürich und Kopenhagen (ALGOL Formelsprache) mit Befriedigung zur Kenntnis; sie empfiehlt auf dieser Grundlage weitere Verhandlungen zu führen mit dem Ziel einer möglichst baldigen internationalen Vereinbarung.

- IV. Fachausschuß für Rechenmaschinen,
Leiter: Prof. Dr. Alwin Walther

Prof. Dr. Walther teilt mit:

„Der Fachausschuß beriet die Deutsche Forschungsgemeinschaft bei der Anschaffung elektronischer Rechenanlagen für deutsche Hochschulen. Bisher sind in der Bundesrepublik an Universitäten und Technischen Hochschulen vorhanden: 14 elektronische Rechenautomaten, weitere 6 in der Auslieferung und 8 bestellt, ferner einige elektronische Analogrechner. Weiterhin wirkte der Fachausschuß mit bei der Abfassung der DFG-Broschüre „Elektronisches Rechnen“ und bei der Sammlung und Auswertung von Unterlagen über den Unterricht im elektronischen Rechnen an den deutschen Hochschulen. Die Hauptarbeit galt der Vorbereitung der Internationalen Tagung über Informationsverarbeitung (ICIP) in Paris (15. bis 20. Juni 1959). Für diesen Zweck schlossen sich die vier wissenschaftlichen Gesellschaften GAMM, NTG, DVM und VDPG zu DARA (Deutscher Ausschuß für Rechenanlagen) zusammen. Dank dessen intensiver Aufklärungsarbeit befinden sich unter den über 1500 zu erwartenden Teilnehmern für die Pariser Tagung bisher deren 130 aus Deutschland.

Alles in allem kann man mit Befriedigung feststellen, daß Deutschland in Wissenschaft und Industrie auf dem Gebiete der Rechenanlagen den früheren weiten Vorsprung des Auslandes einigermaßen aufgeholt hat.“

- V. Fachausschuß für Regelungsmathematik,
Leiter: Prof. Dr.-Ing. Winfried Oppelt

Prof. Dr. Oppelt teilt mit: „Wir haben im letzten Jahr keine besondere Tagung durchgeführt; doch ist das Bändchen „Anwendung von Rechenmaschinen bei der Berechnung von Regelvorgängen“ erschienen und wird an Mitglieder der GAMM vom Oldenbourg-Verlag verbilligt abgegeben.“

*) Ist inzwischen erschienen. H.

VI. Fachausschuß für Rheologie,

Leiter: Prof. Dr.-Ing. Fritz Schultz-Grunow

Prof. Dr. Schultz-Grunow teilt mit: „Im Frühjahr 1959 fand in Oeynhausen die Internationale Rheologentagung statt und vor kurzem eine interne Tagung zusammen mit dem Fachausschuß für Rheologie des VDI. Seit dem Frühjahr besteht eine deutsche rheologische Zeitschrift ‚Rheologica Acta‘, die die Mitglieder des Fachausschusses verbilligt beziehen können. Nächstes Jahr wird in England eine Tagung sein, auf der auf persönliche Einladung Referate über größere Arbeitsgebiete gegeben werden.“

VII. Fachausschuß für Statistische Verfahren,

Leiter: Prof. Dr. Hans Richter

Der Ausschuß pflegt alle 2 Jahre im Rahmen des Oberwolfacher Forschungsinstitutes eine Tagung zu veranstalten. Die letzte Veranstaltung fand dort im März 1958 unter Leitung von Prof. Dr. Schmetterer statt. Die nächste Tagung ist für Frühjahr 1960 geplant, die Leitung wird voraussichtlich in Händen von Prof. Dr. Krickeberg liegen. Anfang Juni 1959 findet eine internationale statistische Tagung in Prag statt, zu der Prof. Dr. Richter eingeladen ist; er hält dort einen Vortrag.

VIII. Der Fachausschuß für Strömungsforschung,

Leiter: Dr. Fritz Riegels,

hielt in diesem Jahr keine eigene Veranstaltung ab.

B. Neue Fachausschüsse

I. Es wird ein Fachausschuß für Ausbildung mathematisch-technischer Assistenten gegründet. Die Leitung liegt in Händen von Prof. Dr. Bauer.

II. Ein neuer Fachausschuß für Unternehmensforschung (operations research) wird von Prof. Dr. Görtler, Freiburg i. Br., Sonnenhalde 90, geleitet. Interessenten an diesem Gebiet werden gebeten, sich unmittelbar an den Leiter des Ausschusses zu wenden.

C. Der Mitgliederstand der GAMM betrug (am 1. Juni 1959) 1091 Mitglieder. Hiervon sind 267 Ausländer, 57 korporative Mitglieder. Die Kassenlage, über die die Kassenführer berichteten, kann zur Zeit als günstig bezeichnet werden.

D. Aus der Tätigkeit der GAMM

Die Tätigkeit der GAMM im einzelnen anzuführen, würde hier zu weit führen. Es sei hier nur ein Punkt genannt: Die gesammelten Werke von Ludwig Prandtl werden von den Herren Professoren Görtler, Schlichting, Tollmien herausgegeben. Der Springer-Verlag hat sich freundlicherweise bereit erklärt, die Herausgabe und damit den Hauptteil der Kosten zu übernehmen. Der Rest der Kosten wird von der WGL, der Max-Planck-Gesellschaft und der GAMM getragen.

E. Mitgliedsbeitrag

Der Mitgliedsbeitrag wird auf der bisherigen Höhe belassen (für Einzelmitglieder DM 6,—), es wird aber darauf hingewiesen, daß es vielleicht im nächsten Jahr nötig sein wird, den Mitgliedsbeitrag zu erhöhen.

F. Jahrestagung 1960

Es wird in Aussicht genommen, die Wissenschaftliche Jahrestagung der GAMM im nächsten Jahr in Freiberg/Sachsen in der Zeit vom 19. bis 23. April 1960 (Osterwoche) abzuhalten.

G. Satzungsänderung

Es wird eine Satzungsänderung betreffs der Organisation des Vorstandes und Vergrößerung des Wissenschaftlichen Ausschusses beschlossen.

H. Neuwahlen

Für den verstorbenen stellvertretenden Vorsitzenden Prof. Dr. Fr. A. Willers wird Prof. Dr. Heinrich als stellvertretender Vorsitzender gewählt, ferner Prof. Dr. Kneschke als 2. Kassenführer (bisher Prof. Dr. Heinrich), die Professoren Dr. Quade, Bauer, Richter werden zu Mitgliedern des Wissenschaftlichen Ausschusses gewählt (anstelle der turnusmäßig ausscheidenden Professoren Dr. Schulz, Heinhold, Görtler), die für 1959 gewählten Kassenprüfer werden auch für 1960 gewählt, nur tritt Prof. Dr. Weigand anstelle von Prof. Dr. Kneschke.

L. Collatz

A. ANGEWANDTE MATHEMATIK

Der Raum der stetigen Funktionen in der Potentialtheorie

Von Gottfried Anger

In der angewandten Mathematik spielen die direkten Methoden der Anyalsis eine wichtige Rolle. Man kann daraus öfters numerische Näherungsverfahren entwickeln. Der Autor versuchte, eine direkte Methode für lineare Randwertaufgaben (z. B. zweite und dritte Randwertaufgabe der Potentialtheorie) zu entwickeln. Es war notwendig, einen allgemeinen Konvergenzsatz für Potentiale zu beweisen. Dabei entstand eine neue Methode für die Potentialtheorie.

In der klassischen Potentialtheorie betrachtet man im dreidimensionalen euklidischen Raum R^3 Potentiale a) einer Volumenverteilung U mit $U(x) = \int \frac{1}{|x-y|} \varrho(y) dV$, b) einer Flächenverteilung W mit $W(x) = \int \frac{1}{|x-y|} \sigma(y) dS$, wobei $|x-y|$ der Abstand der Punkte x und y bedeutet und V und S ganz im Endlichen gelegen sind. Um eine allgemeine Theorie aufzubauen, ist eine Erweiterung des Potentialbegriffes auf allgemeinere Massenverteilungen notwendig [2], [3]. In den Anwendungen kann man die Potentiale, die man im Endergebnis erhält, im allgemeinen wieder in der Form a) oder b) darstellen. Es bezeichne C den Banachraum der im R^3 stetigen Funktionen, die im unendlich fernen Punkt verschwinden. Auf C ist die Norm $\|f\| = \sup_{x \in R^3} |f(x)|$ erklärt. Eine Folge (f_n) von Elementen aus C heißt konvergent gegen $f \in C$, wenn $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Dies ist gleichbedeutend damit, daß (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert. μ mit $\mu(f) = \int f \varrho dV$, $f \in C$, welches eine Abbildung von C in die Menge R der reellen Zahlen ist, genügt den Beziehungen 1) $\mu(f+g) = \mu(f) + \mu(g)$, $f, g \in C$, 2) $\mu(af) = a\mu(f)$, $a \in R$ und 3) $|\mu(f)| \leq M\|f\|$, $M \geq 0$ reelle Zahl. Jede Abbildung von C in R , für welche 1) und 2) erfüllt sind, nennt man eine Linearform auf C . Wegen 3) ist diese Linearform stetig, denn aus $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ folgt $\mu(f_n) \rightarrow \mu(f)$. Man spricht in diesem Fall auch von einer Massenverteilung oder einem Maß. Es bezeichne C' die Menge aller auf C stetigen Linearformen. Für solche Massenverteilungen μ ist das Potential U^μ definiert durch $U^\mu(x) = \int \frac{1}{|x-y|} d\mu(y)$ (Radon-Stieltjes-Integral) [1], [2], [3].

Es bezeichne F^+ die Menge aller positiven Massenverteilungen λ , d. h. $\lambda(f) \geq 0$ für $f \geq 0$, $f \in C$, deren Masse ganz im Endlichen gelegen ist, so daß U^λ stetig ist im ganzen Raum. Weiter sei F der lineare Raum aller $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \in F^+$, D der lineare Raum aller $g = U^\lambda$ ($\lambda \in F$). Es gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} U^\lambda(x) = 0$, d. h., D ist eine Teilmenge von C . Jede Massenverteilung $d\mu = \varrho dV$ mit stetigem ϱ erzeugt ein stetiges Potential. Mit G bezeichnen wir den linearen Raum aller U^μ ($\mu \in C'$). Jedem $U^\mu \in G$ läßt sich eindeutig eine auf D stetige Linearform durch folgende Integraltransformation zuordnen [1], [2]

$$U^\mu \rightarrow \int U^\mu d\lambda = \int \int \frac{1}{|x-y|} d\mu(y) d\lambda(x) = \int \int \frac{1}{|x-y|} d\lambda(x) d\mu(y) = \int U^\lambda d\mu = \int g d\mu = \mu(g)$$

mit $\lambda \in F$, $g = U^\lambda \in D \subset C$. Damit ist der Zusammenhang zwischen Potentialtheorie und dem Raum der stetigen Funktionen hergestellt. Probleme der Potentialtheorie werden auf diese Weise auf Probleme des Raumes C transformiert. Weiter ist $(g, \mu) \rightarrow \int g d\mu$ auf $D \times C'$ eine Bilinearform. Es stehen somit der Potentialtheorie die Sätze der Funktionalanalysis zur Verfügung. Man kann die hier skizzierte Methode auch auf andere partielle Differentialgleichungen, z. B. elliptische Differentialgleichungen, übertragen.

Es sei Ω ein beschränktes Gebiet, dessen Rand K genügend glatt ist, ε_x die im Punkt $x \in \Omega$ gelegene Einheitsmasse. Dann gibt es nach dem *Balayage*-Prinzip [1], [2], [3] eine auf K gelegene Massenverteilung μ_x , so daß dort die Potentiale $U^{\varepsilon_x}(y)$ und $U^{\mu_x}(y)$ übereinstimmen. Es ist $u(x) = \int f d\mu_x = \int f \varrho_x dS$ die Lösung des *Dirichletschen* Problems. Nach den bisherigen Überlegungen müßte es möglich sein, die Dichte ϱ_x mit der hier entwickelten Methode näherungsweise zu bestimmen.

Literatur

- [1] G. Anger, Sur le rôle des potentiels continus dans les fondements de la théorie du potentiel. Séminaire de théorie du potentiel, 2^{ème} année, 1958. Institut Henri Poincaré, Université de Paris.
- [2] G. Anger, Ein funktionalanalytischer Aufbau der Potentialtheorie. Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Dresden, Jahrgang 1958/59, Heft 4.
- [3] M. Brelot, La théorie moderne du potentiel. Ann. Institut Fourier, t. IV, 1953, S. 113—140. Der letzte Artikel gibt eine Übersicht über die Entwicklung der modernen Potentialtheorie und enthält ein ausführliches Literaturverzeichnis.

Anschrift: Dr. G. Anger, Radebeul b. Dresden, Gröbastr. 16

Automatisches Programmieren bei Kleinrechenautomaten

Von K.-H. Bachmann

Beim automatischen Programmieren wird die Aufstellung des Programmes für einen Rechenautomaten aus einem Eingangstext vom Automaten selbst ausgeführt. Im Eingangstext soll möglichst weitgehend die mathematische Formelsprache verwendet werden. Das hiernach vorliegende Übersetzungsproblem ist seit mehreren Jahren prinzipiell gelöst, besonders zu erwähnen ist eine Arbeit von Rutishauser (Vortrag auf der GAMM-Tagung 1951). Inzwischen wurde eine Anzahl von Systemen zur automatischen Programmierung für Großrechenanlagen entwickelt, das bekannteste ist das FORTRAN-System für IBM 704.

Die für den Eingangstext zu verwendende Eingangssprache, d. h. die Gesamtheit der erlaubten Symbole und die Regeln zu ihrer Zusammensetzung, ist ein Hauptkennzeichen des betreffenden Programmierungssystems. Neuerdings wurde eine gemeinsame Sprache als Grundlage für alle Programmierungssysteme vorgeschlagen. Im allgemeinen wird jedoch auch ein in dieser Sprache (ALGOL) abgefaßter Text noch abgewandelt werden müssen, um als Eingangstext für einen speziellen Automaten dienen zu können.

Kleinrechenautomaten unterscheiden sich von Großanlagen hauptsächlich durch geringere Speicherkapazität und haben eine wesentlich geringere Operationsgeschwindigkeit. Man wird also von einem Kleinautomaten nicht eine derartig vollständige Programmierungsarbeit wie von einer Großanlage verlangen, sondern den Eingangstext vorher bereits so weit aufgliedern, daß eine Anzahl zeitraubender Zuordnungs-, Identifizierungs- und Klassifizierungsoperationen wegfallen. Ein gewisser Teil der Programmierungsarbeit soll also dem Menschen überlassen bleiben, z. B. die Angabe der Programmstruktur und die Zuordnung von Indexregistern. Es wird deshalb vorgeschlagen, die Eingangsinformation in folgende Teile zu gliedern:

1. Formelteil,
2. Strukturteil,
3. Variablenliste,
4. Indexliste,
5. Indexregister.

Hierzu sind einige Bemerkungen zu machen: Der Formelteil soll aus nummerierten Formeln bestehen, die in der üblichen Formelsprache notiert sein sollen, das Gleichheitszeichen soll jedoch durch das Substitutionszeichen \Rightarrow („ergibt“) ersetzt werden. Rechts vom Zeichen \Rightarrow soll stets eine Variable bzw. ein Funktionssymbol stehen. Zu Entscheidungszwecken sollen noch die Symbole ≥ 0 , > 0 , $= 0$ zugefügt werden. Ein Test fällt positiv aus, wenn der links von diesem Symbol stehende Ausdruck die betreffende Eigenschaft hat.

Das Strukturdiagramm für ein auszuführendes Problem besteht im wesentlichen aus den zwei Elementen „Formel ausführen und weitergehen“ und „Verzweigen“. Hierzu tritt noch das Element „Stop“. Im Strukturteil sollen nun die beiden zuerst erwähnten Elemente als „Formelnummer α “ bzw. als Tripel von Formelnummern in der Form „wenn α , ja β , nein γ “ notiert werden. Ist nur eine Nummer notiert, wird die entsprechende Formel ausgeführt und zu der als nächsten notierten Anweisung des Strukturteiles weitergegangen. Im Fall eines Formeltripels muß α Nummer einer mit einem Bedingungszeichen abschließenden Formel sein, β wird danach als nächste Formel programmiert. Danach werden alle folgenden programmiert, bevor γ an die Reihe kommt. Dadurch wird eine eindeutige Abbildung der üblicherweise zweidimensional aufgezeichneten Struktur auf eine lineare Folge von Operationen erreicht. Es ist zweckmäßig, für die Rückkehr zu einer bereits programmierten Formel ein besonderes Rückkehrzeichen anzufügen (Element „ $R\alpha$ “). An der betreffenden Stelle ist dann ein unbedingter Sprung zu programmieren.

Es scheint zweckmäßig, in der Variablenliste Variablen Adressen zuzuordnen bzw. für Variablengruppen Anfangsadressen und Spannen für Indexänderungen anzugeben. Die Adressenzuordnung wird also aus dem Bereich des automatischen Programmierens herausgelöst. In der Indexliste werden Indizes ebenfalls Adressen zugeordnet. Der Teil für die Indexregisterbesetzung enthält Angaben, in welcher Weise für gewisse Gruppen der Rechnung die Indexregister verwendet werden.

Abschließend sei noch bemerkt, daß für die Eingabeverchlüsselung eine Anordnung, die für jedes Symbol eine Speicherzelle benutzt, zweckmäßig sein kann, weil dadurch Verarbeitungskennzeichen (z. B. für die Ordnung der Ausführung) leicht an die zugehörige Stelle zu bringen sind.

Moderne Operatorenrechnung

Von Lothar Berg

1. Geschichtlicher Überblick

Bekanntlich konnte die Operatorenrechnung in der Form, wie sie von Heaviside [1] gehandhabt wurde, mathematisch nicht begründet werden, da ihr die Definition $p = \frac{d}{dt}$ zugrunde lag. Man kannte nicht ihren Anwendungsbereich und erhielt daher auch falsche Resultate. Dies änderte sich, als man zur Begründung der Operatorenrechnung die Laplace-Transformation heranzog, wobei sich außerdem der Vorteil ergab, daß jetzt auch nicht verschwindende Anfangswerte berücksichtigt werden konnten. Mit Hilfe der Laplace-Transformation wird jeder Funktion $F(t)$ aus dem „Originalbereich“ eine Funktion $\varphi(p)$ gemäß

$$\varphi(p) = \mathfrak{L}[F(t)] \equiv p \int_0^{\infty} e^{-pt} F(t) dt \quad (1)$$

aus dem „Bildbereich“ zugeordnet. Der Buchstabe p bezeichnet eine komplexe Veränderliche, und die Operatormultiplikation mit p ist jetzt die gewöhnliche Multiplikation von p mit der Bildfunktion. Definiert man die Laplace-Transformation in der Form

$$f(s) = \mathfrak{L}\{F(t)\} \equiv \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt, \quad (2)$$

so ergeben sich noch gewisse Vereinfachungen, wobei es natürlich unwesentlich ist, daß die Veränderliche im Bildbereich hier mit s bezeichnet wird. Während die Schreibweise (1) etwa in dem Buch [2] von Wagner benutzt wird, setzt sich die Schreibweise (2) durch die Bücher von Doetsch [3] immer mehr durch. Die Laplace-Transformation ist aber eigentlich ein fremdes Element in der Operatorenrechnung.

Eine von solchen Hilfsmitteln freie direkte Begründung der Operatorenrechnung gegeben zu haben, ist das Verdienst von Mikusiński [4], der als exakte mathematische Grundlage das Faltungsprodukt

$$\{F(t)\}\{G(t)\} = \left\{ \int_0^t F(t-\tau) G(\tau) d\tau \right\} \quad (3)$$

wählt. Die Klammern auf der linken Seite sollen ausdrücken, daß es sich hier nicht um die gewöhnliche Multiplikation handelt. Die Bedeutung dieser Begründung liegt vor allem darin, daß man jetzt nicht mehr die Konvergenz des Laplace-Integrals voraussetzen braucht und man zugleich eine exakte Einführung der Diracschen Delta-Funktion erhält, ohne die Theorie der Distributionen heranziehen zu müssen. Außerdem kann man jetzt gewisse Eindeutigkeitsfragen entscheiden. Rein formelmäßig wird erreicht, daß man in den nach (2) aufgestellten Beziehungen überall den Buchstaben \mathfrak{L} weglassen kann. Das entsprechende Analogon hiervon zur Schreibweise (1) stammt von Rajewski [5], der das Produkt zweier Funktionen folgendermaßen definiert:

$$[F(t)] [G(t)] = \left[\frac{d}{dt} \int_0^t F(t-\tau) G(\tau) d\tau \right] \quad (4)$$

Wir wollen jetzt noch einen Schritt weitergehen, und zwar wollen wir nicht nur den Buchstaben \mathfrak{L} , sondern auch noch die Klammern weglassen. Zur Unterscheidung der durch ein Integral definierten „Funktionenmultiplikation“ von der gewöhnlichen „Wertmultiplikation“ schreiben wir erstere mit Malpunkt und letztere ohne. Dies läßt sich jedoch nur bei der Definition (4) des Funktionenproduktes konsequent durchführen. Für konstante Funktionen $F \equiv a$, $G \equiv b$ folgt aus (4) in unserer Schreibweise $a \cdot b = ab$, so daß hier bei Konstanten beide Multiplikationen übereinstimmen, während sich nach (3) $a \cdot b = a b t$ ergeben würde. Folglich können wir speziell bei Zahlenfaktoren im Falle (4) stets den Malpunkt verwenden (11 würde nämlich elf und nicht 1 mal 1 bedeuten), was im Falle (3) nicht möglich wäre. Ist andererseits bei einem Funktionenprodukt ein Faktor in Operatorenschreibweise gegeben, so können wir den Malpunkt auch wieder weglassen, ohne Verwechslungen befürchten zu müssen, da für Operatoren keine

Wertmultiplikation erklärt ist. Die rein äußerlichen Unterschiede in den verschiedenen Auffassungen der Operatorenrechnung lassen sich (mit etwas abgeänderten Bezeichnungen) zusammenfassend etwa in der folgenden Übersicht zum Ausdruck bringen:

<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> Heaviside $p = \frac{d}{dt}$ $\frac{p}{p-\alpha} \cdot 1 = e^{\alpha t}$ $p F(t) = F'(t)$ </div>			
<div style="border: 1px solid black; height: 40px; margin-top: 10px;"></div>			
Wagner	$\frac{1}{p} = \mathfrak{L}[t]$	$\frac{p}{p-\alpha} = \mathfrak{L}[e^{\alpha t}]$	$p \mathfrak{L}[F(t)] = \mathfrak{L}[F'(t)] + p F_0$
Rajewski	$\frac{1}{p} = [t]$	$\frac{p}{p-\alpha} = [e^{\alpha t}]$	$p [F(t)] = [F'(t)] + p F_0$
hier	$\frac{1}{p} = t$	$\frac{p}{p-\alpha} = e^{\alpha t}$	$p F(t) = F'(t) + p F_0$
Doetsch	$\frac{1}{s} = \mathfrak{L}\{1\}$	$\frac{1}{s-\alpha} = \mathfrak{L}\{e^{\alpha t}\}$	$s \mathfrak{L}\{F(t)\} = \mathfrak{L}\{F'(t)\} + F_0$
Miku- siński	$\frac{1}{s} = \{1\}$	$\frac{1}{s-\alpha} = \{e^{\alpha t}\}$	$s \{F(t)\} = \{F'(t)\} + F_0$
	$\frac{1}{s} \neq 1$, daher kein Analogon möglich		

2. Aufbau der Operatorenrechnung

Wie bereits erwähnt, wollen wir im folgenden die Definition (4) in der Schreibweise

$$F(t) \cdot G(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t F(t-\tau) G(\tau) d\tau \quad \dots \quad (5)$$

zugrunde legen, wobei $F(t)$ und $G(t)$ für $t \geq 0$ einmal stetig differenzierbare Funktionen sind. Die Vorteile von (5) gegenüber der Schreibweise von Mikusiński bestehen darin, daß die geschweiften Klammern bei den Funktionen überflüssig sind und man jetzt zwischen konstanten Zahlen und konstanten Funktionen nicht zu unterscheiden braucht. Dieser bei Mikusiński unbedingt erforderliche Unterschied kann nämlich dort eine Fehlerquelle sein, da er die mechanische Handhabung der Operatorenrechnung erschwert. Außerdem bedeutet er bei der Begründung der Operatorenrechnung eine didaktische Unschönheit (vgl. [4], §§ 6, 17, 19 und 20).

Da der Aufbau der Operatorenrechnung vorwiegend algebraisch ist, wollen wir die algebraische Terminologie benutzen [6]. Das Produkt (5) besitzt ganz analoge Eigenschaften wie (3), insbesondere läßt sich seine Nullteilerfreiheit unmittelbar auf die von (3) zurückführen. Folglich ist die Menge der für $t \geq 0$ stetig differenzierbaren Funktionen mit der Multiplikation (5) nicht nur ein Ring, sondern sogar ein Integritätsbereich, so daß der zugehörige Quotientenkörper existiert, dessen Elemente „Operatoren“ genannt werden. Wenn Verwechslungen mit der Wertedivision zu befürchten sind, schreiben wir die Körperdivision mit einem Doppelpunkt. Den zum Integrationsoperator t inversen Operator bezeichnen wir mit p . Die Elemente der Form $pF(t)$ mit $F(0) = 0$ können wir mit den für $t \geq 0$ stetigen Funktionen identifizieren. Unter den Operatoren $p^2 F(t)$ befinden sich auch unstetige Funktionen. Wir betrachten jetzt die spezielle Funktion

$$v_\lambda(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } \lambda < t, \\ 0 & \text{für } 0 \leq t < \lambda. \end{cases} \quad \dots \quad (6)$$

Wählen wir in (5) $F(t) = v_\lambda(t)$, so folgt

$$v_\lambda(t) \cdot G(t) = \begin{cases} G(t-\lambda) & \text{für } \lambda < t, \\ 0 & \text{für } 0 \leq t < \lambda, \end{cases}$$

so daß $v_\lambda(t)$ der Verschiebungsoperator ist. Man verifiziert jetzt für stückweise stetige Funktionen $F(t)$ unmittelbar die wichtige Beziehung

$$F(t) = p \int_0^T v_\tau(t) F(\tau) d\tau + v_T(t) \cdot F(t+T), \quad \dots \quad (7)$$

wobei wir zwei Funktionen auch dann als gleich ansehen, wenn sie in höchstens endlich vielen Stellen nicht übereinstimmen. Da nämlich der Verschiebungsoperator eine klassische Funktion ist, können wir diese Beziehung sofort mit Hilfe des Riemannschen Integralbegriffes aufschreiben. Bei Mikusiński ist jedoch der Verschiebungsoperator keine klassische Funktion, so daß er die entsprechende Beziehung erst in den letzten Paragraphen von [4] bringt, nachdem er eine Integralrechnung für Operatoren entwickelt hat.

Die Konvergenzdefinition aus [4] muß man jetzt folgendermaßen abändern: Eine Folge $F_n(t)$ heißt konvergent gegen die Grenzfunktion $F(t)$, wenn die Folgen $F_n(t)$ und $F'_n(t)$ in jedem endlichen Intervall $[0, T]$ gleichmäßig gegen $F(t)$ bzw. $F'(t)$ streben. Dann folgt aus $F_n \rightarrow F$ und $G_n \rightarrow G$ offenbar $F_n \cdot G_n \rightarrow F \cdot G$. Für Operatoren wird jetzt eine natürlichere und allgemeinere Definition als in [4] gegeben: Eine Folge Q_n heißt konvergent gegen $Q = F(t):G(t)$, wenn es eine Darstellung $Q_n = F_n(t):G_n(t)$ gibt mit $F_n \rightarrow F$ und $G_n \rightarrow G$. Dabei können natürlich auch Folgen von Funktionen — als Operatoren aufgefaßt — konvergent sein, die im vorhergehenden Sinne nicht konvergierten, beispielsweise ist die gleichmäßige Konvergenz der Ableitung jetzt überflüssig. Bei dieser Definition gilt der folgende Satz, der bei Mikusiński falsch ist: Aus $P_n \rightarrow P$ und $Q_n \rightarrow Q$ folgt $P_n:Q_n \rightarrow P:Q$, sofern $Q \neq 0$ ist.

3. Die Laplace-Transformation in der Operatorenrechnung

Da die Theorie der Laplace-Transformation gut ausgebaut ist, möchte man ihre Methoden in der modernen Operatorenrechnung nicht vermissen. Nach Ditkin [7] besteht zwischen der Laplace-Transformation und der Operatorenrechnung folgender Zusammenhang: Wir betrachten die Menge \mathfrak{M} aller für $0 \leq t$ definierten Funktionen, die bis auf höchstens endlich viele Ecken, Sprünge oder nicht definierte Stellen stetig differenzierbar sind und für die das Integral (1) für mindestens einen Wert p_0 absolut konvergiert. Die entsprechenden Laplace-Transformierten $\varphi(p)$ bilden dann offenbar bezüglich der gewöhnlichen Addition und Multiplikation einen Ring \mathfrak{L} von analytischen Funktionen. In diesem Ring betrachten wir das Ideal \mathfrak{I}_n aller Funktionen der Gestalt $e^{-np} \varphi(p)$ und den Restklassenring $\mathfrak{R}_n = \mathfrak{L}/\mathfrak{I}_n$. Für $n = 1, 2, 3, \dots$ sind dies unendlich viele Restklassenringe, aus denen wir die direkte Summe $\mathfrak{S} = (\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots)$ bilden, bei der Addition und Multiplikation komponentenweise erfolgen. Man kann sich jetzt davon überzeugen, daß der Teilring \mathfrak{T} mit den Elementen (r_1, r_2, r_3, \dots) , $r_n \in \mathfrak{R}_n$, für deren Komponenten $r_1 > r_2 > r_3 > \dots$ gilt, ein Integritätsbereich ist, dessen Quotientenkörper \mathfrak{Q} zu dem in Punkt 2 konstruierten Körper der Operatoren isomorph ist. Identifizieren wir dort den Operator p mit einer komplexen Veränderlichen, so können wir isomorphe Elemente der beiden Körper einander gleichsetzen. Damit können wir auf die bereits vorhandene Funktionentheorie zurückgreifen, während Mikusiński zunächst Operatorfunktionen definieren und dann für diese Funktionen eine neue Analysis aufbauen muß. Wegen $r_n > r_{n+1}$ für alle n ist das Element (r_1, r_2, r_3, \dots) bereits durch die Angabe von $(r_k, r_{k+1}, r_{k+2}, \dots)$ für irgendeine natürliche Zahl k bestimmt. Wir wollen daher beide Ausdrücke einander gleichsetzen und mit ihnen in der Form

$$(r_k, r_{k+1}, \dots) + (s_l, s_{l+1}, \dots) = (r_m + s_m, r_{m+1} + s_{m+1}, \dots)$$

rechnen. Dann können wir nämlich auch Divisionen in derselben Weise durchführen

$$\frac{(r_1, r_2, r_3, \dots)}{(s_1, s_2, s_3, \dots)} = \left(\frac{r_l}{s_l}, \frac{r_{l+1}}{s_{l+1}}, \frac{r_{l+2}}{s_{l+2}}, \dots \right),$$

wobei der Index l so zu wählen ist, daß $s_l \neq 0$ ist. Gibt es insbesondere ein Element $\varphi(p) \in \mathfrak{L}$, für das $\varphi(p) \in r_n$ gilt für alle n , so können wir (r_1, r_2, r_3, \dots) sogar durch $\varphi(p)$ ersetzen. Beispielsweise erhalten wir aus (1) und (6) $v_\lambda(t) = e^{-p^\lambda}$, so daß (7) für $T = n$ die Form

$$F(t) = p \int_0^n e^{-p\tau} F(\tau) d\tau + e^{-pn} F(t+n) \dots \dots \dots (8)$$

annimmt. Hieraus ergibt sich insbesondere für $n \rightarrow \infty$, daß das Integral (1), als Funktion von t betrachtet, für jede Funktion $F(t) \in \mathfrak{M}$ trivialerweise konvergiert.

Die Elemente von \mathfrak{T} kann man auch durch eine asymptotische Eigenschaft charakterisieren, die anschaulicher ist als die Deutung durch direkte Summen von Restklassen. Für die Elemente $\varphi(p) \in \mathfrak{L}$ gilt offenbar $\varphi(p) = O(1)$ für $|p| \rightarrow \infty$ mit $\Re p \geq p_0$. Wegen $F(t) = \varphi(p)$ folgt dann aus (8)

$$\varphi(p) = p \int_0^n e^{-p\tau} F(\tau) d\tau + O(e^{-pn}) \dots \dots \dots (9)$$

mit $F(t) \in \mathfrak{M}$. Man kann daher das Laplace-Integral (1), auch wenn es als Funktion von p divergiert, als asymptotische Entwicklung im Sinne von (9) auffassen (vgl. [3], Bd. II, S. 409). Die Elemente des zugehörigen Quotientenkörpers \mathfrak{Q} lassen sich jetzt folgendermaßen deuten: \mathfrak{Q} ist der Menge aller direkten Summen $(\chi_k(p), \chi_{k+1}(p), \chi_{k+2}(p), \dots)$ isomorph, deren Komponenten $\chi_n(p)$ für $n \geq k$ und hinreichend großem k die Darstellung

$$\chi_n(p) = \frac{\varphi_n(p) + O(e^{-pn})}{\psi_n(p) + O(e^{-pn})} \dots \dots \dots (10)$$

zulassen, wobei die $\varphi_n(p)$ und $\psi_n(p)$ in einer gewissen Halbebene $\Re p \geq c > 0$ holomorph und beschränkt sind und außerdem $\varphi_{n+1}(p) = \varphi_n(p) + O(e^{-np})$ und $\psi_{n+1}(p) = \psi_n(p) + O(e^{-pn})$ gilt für $|p| \rightarrow \infty$ mit $\Re p \geq c$. Damit wird auch die Frage nach einer einfachen funktionentheoretischen Charakterisierung der Bildfunktionen der Laplace-Transformation beantwortet, die bisher noch offen war. Während man zu einem durch (stetig differenzierbare) Funktionen von t gegebenen Element $F(t):G(t)$ die zugehörigen Funktionen von p wegen (9) gemäß

$$\varphi_n(p) = p \int_0^n e^{-p\tau} F(\tau) d\tau, \quad \psi_n(p) = p \int_0^n e^{-p\tau} G(\tau) d\tau \quad (11)$$

finden kann, erhält man aus einem durch Funktionen von p der Form (10) gegebenen Element die zugehörigen Funktionen von t gemäß

$$F_0(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{qt} \frac{\varphi_n(q)}{q^3} dq, \quad G_0(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{qt} \frac{\psi_n(q)}{q^3} dq \quad \text{für } 0 \leq t < n \quad (12)$$

Dabei besteht zwischen den in (11) und (12) auftretenden Funktionen der Zusammenhang $F_0(t) = \int_0^t \int_0^\tau F(\sigma) d\sigma d\tau$, $G_0(t) = \int_0^t \int_0^\tau G(\sigma) d\sigma d\tau$, wenn $\varphi_n(p)$ und $\psi_n(p)$ in (11) und (12) dieselben Funktionen bezeichnen, denn es gilt

$$F(t):G(t) = F_0(t):G_0(t) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\varphi_n(p)}{\psi_n(p)} = \frac{p^{-2} \varphi_n(p)}{p^{-2} \psi_n(p)}$$

Die Richtigkeit von (12) wird durch die Beziehung $e^{qt} = \frac{p}{p-q}$ veranschaulicht.

Bei der praktischen Handhabung der Operatorenrechnung hat man jetzt folgendermaßen vorzugehen: Läßt sich eine Gleichung für eine (integrierbare) Funktion $F(t)$ so umschreiben, daß sie nur noch Funktionen von p enthält, so braucht man die Gleichung in der letzten Form nicht vollständig aufzulösen, sondern nur bis auf einen Fehler der Ordnung $O(e^{-np})$, um $F(t)$ für $0 \leq t < n$ zu bestimmen. Es handelt sich dabei also um asymptotische Lösungen im Sinne von [8]. Bei den Anwendungen der Operatorenrechnung steht es natürlich außerdem jedem frei, den Funktionen $\varphi(p)$ noch Funktionen $f(s)$ gemäß $f(s) = \frac{\varphi(s)}{s}$ zuzuordnen, damit man bei der weit verbreiteten Schreibweise von Doetsch bzw. Mikusiński bleiben kann, wo verschiedene Formeln bekanntlich etwas einfacher sind.

4. Weitere Operatoren

Geht man nicht von Funktionen einer kontinuierlichen Veränderlichen t , sondern von Funktionen a_n einer diskreten Veränderlichen $n = 0, 1, 2, \dots$ aus, so kann man eine ganz analoge Operatorenrechnung aufbauen, wenn die Ringmultiplikation durch

$$a_n \cdot b_n = \sum_{\nu=0}^n a_\nu b_{n-\nu} = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu b_{n-1-\nu} \quad (13)$$

definiert wird. Für konstante Funktionen $c_n = c$ gilt dann wieder $c_n \cdot a_n = c a_n$. Weiterhin ist

$$n \cdot a_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu$$

Für die Funktion d_n mit den Werten $d_0 = 1$, $d_n = 0$ für $n > 0$ gilt

$$b_{n+1} - b_n = d_n \cdot b_n - b_0 d_n$$

Der Nachweis der Nullteilerfreiheit von (13) läßt sich sehr leicht führen, so daß wir auch hier zum Quotientenkörper übergehen können. Setzen wir $q = 1 + 1:n$, so gilt etwa $a^n = \frac{q-1}{q-a}$. Der Formel (8) entspricht

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{q}\right) \sum_{\nu=0}^{n-1} q^{-\nu} a_\nu + q^{-n} a_{n+m} \quad (14)$$

oder für $m \rightarrow \infty$

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{q}\right) \sum_{v=0}^{\infty} \frac{a_v}{q^v}.$$

Man kann jetzt q ebenfalls als komplexe Veränderliche deuten und ganz entsprechende Überlegungen mit Restklassen, direkten Summen usw. durchführen. Einen direkten Zusammenhang mit der vorhergehenden Operatorenrechnung erhalten wir, wenn wir $q = e^p$ setzen. Dann gilt nämlich

$$F([t]) = p \int_0^{\infty} e^{-p\tau} F([t]) d\tau = \left(1 - \frac{1}{q}\right) \sum_{v=0}^{\infty} q^{-v} F(v) = F(n) \quad \dots \quad (15),$$

wenn $[t]$ den größten ganzen Teil von t bezeichnet (vgl. auch [9]).

Abschließend sei erwähnt, daß man natürlich auch ganz analog eine Operatorenrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher entwickeln kann. Dabei kann man auf die Literatur zurückgreifen, in der die Operatorenrechnung mit Hilfe der zu (1) analogen zweidimensionalen Laplace-Transformation

$$\varphi(p, q) = p q \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-px - qy} F(x, y) dx dy \quad \dots \quad (16)$$

aufgebaut wird [10]. Eine ausführliche Darstellung aller hier gemachten Andeutungen befindet sich in Vorbereitung.

Literatur

- [1] O. Heaviside, *Electromagnetic Theory II*, London 1899.
- [2] K. W. Wagner, *Operatorenrechnung und Laplacesche Transformation*, Leipzig 1950.
- [3] G. Doetsch, *Handbuch der Laplace-Transformation I—III*, Basel-Stuttgart 1950, 1955 bzw. 1956.
- [4] J. Mikusiński, *Operatorenrechnung*, Berlin 1957.
- [5] M. Rajewski, Berechnung der Einschaltvorgänge in linearen Schaltungen mittels „abgeschnittener“ Funktionen, *Wiss. Z. Hochschule Ilmenau* 4 (1958) S. 143—165.
- [6] B. L. Van der Waerden, *Moderne Algebra I*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950.
- [7] W. A. Ditkin, Zur Theorie der Operatorenrechnung (russ.), *Доклады Академии Наук СССР* 123 (1958) S. 395—396.
- [8] L. Berg, Asymptotische Auflösung von Differential-Funktionalgleichungen, *Math. Nachr.* 17 (1959) S. 195—210.
- [9] J. S. Zypkin, *Differenzengleichungen der Impuls- und Regelungstechnik*, Berlin 1956.
- [10] W. A. Ditkin u. A. P. Prudnikow, *Operatorenrechnung mit zwei Veränderlichen und ihre Anwendungen* (russ.), Moskau 1958.

Anschrift: Dr. L. Berg, Ilmenau, Clara-Zetkin-Str. 3

Ein Fehlerabschätzungsprinzip für Funktionalgleichungen

Von G. Bertram

Ein nichtlinearer Operator T sei für die Elemente u eines linearen, geeignet normierten Raumes R definiert, und die Funktionalgleichung $Tu = 0$ besitze dort eindeutig die Lösung u_0 . Es sollen Aussagen über die Norm des Fehlers $f = u_0 - v \neq 0$ einer Näherung $v \in R$ gewonnen werden. Dazu wähle man ein Funktional, das für u_0 verschwindet: $G[u_0] = 0$. Mit $\varepsilon_0 = \|f\|$, $z_0 = \|f\|^{-1} \cdot f$, d. h. $\|z_0\| = 1$ und $u_0 = v + \varepsilon_0 z_0$ ist dann $G[v + \varepsilon_0 z_0] = 0$. Durchläuft daher $z \in R$ alle normierten Elemente: $\|z\| = 1$, so besitzt die Gleichung $G[v + \varepsilon z] = 0$ jedenfalls für $z = z_0$ die positive reelle Nullstelle $\varepsilon = \varepsilon_0$. Repräsentiert $\varepsilon_\tau[z]$ die positiven Nullstellen der Gleichung bei fester Wahl von z , so folgt

$$\|f\| \leq \sup_{\|z\|=1} \varepsilon_\tau[z].$$

Die rechte Seite läßt sich oft abschätzen. Die Anwendung des Prinzips führt zum Teil auf bekannte, zum Teil auf neue Abschätzungen. Die numerischen Ergebnisse sind häufig brauchbar. Einzelheiten und Beispiele (Gleichungssysteme, nichtlineare Randwertaufgaben für gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen) sollen an anderer Stelle veröffentlicht werden.

Anschrift: Dozent Dr. G. Bertram, Hamburg 39, Krohnskamp 72, I

Zur iterativen Behandlung linearer Funktionalgleichungen

Von Horst Bialy

Sei \mathfrak{H} ein Hilbertraum im Sinne von Riesz [1] und $\mathfrak{E}(\mathfrak{H})$ die Menge der linearen beschränkten Abbildungen von \mathfrak{H} in sich. Wir betrachten die lineare Funktionalgleichung

$$Tx = y \quad \dots \quad (1)$$

mit $T \in \mathfrak{E}(\mathfrak{H})$, $y \in \mathfrak{H}$ und der Lösung $x \in \mathfrak{H}$. Eine weitere Untersuchung der in [2] genannten Iterationsverfahren zur Lösung von (1) zeigt, daß sich die dort angegebenen hinreichenden Konvergenzkriterien zu notwendigen und gleichzeitig hinreichenden Bedingungen verschärfen lassen, wobei sich die Vollstetigkeit von T als nicht wesentlich erweist.

Bemerkenswert ist ferner, daß die Bildfolge der Näherungen $\{Tx_n\}$ selbst dann noch konvergiert, wenn (1) nicht lösbar ist. Es gilt

$$\|Tx_n - y\| \rightarrow \inf_{x \in \mathfrak{H}} \|Tx - y\| \quad \dots \quad (2).$$

Das Minimalprinzip: Nach Vorgabe von $T \in \mathfrak{E}(\mathfrak{H})$, $y \in \mathfrak{H}$ und der Schranke $\varepsilon > 0$ ist ein $x' \in \mathfrak{H}$ zu suchen, so daß

$$\|Tx' - y\| < \inf_{x \in \mathfrak{H}} \|Tx - y\| + \varepsilon \quad \dots \quad (3)$$

gilt,

umfaßt für die Anwendungen den lösbaren und den nichtlösbaren Fall von (1). Die iterative Lösung von (3) kann wegen (2) mit den in [2] genannten Verfahren, die T eventuell noch etwas weiter einschränken (T positiv oder $T = T^*$), auch dann noch erfolgen, wenn die Näherungsfolge $\{x_n\}$ selbst divergiert. Somit können auch divergente Iterationsprozesse praktisch von Bedeutung sein. Eine ausführliche Darstellung dieses Stoffgebietes erfolgt in Kürze im "Archive for Rational Mechanics and Analysis".

Literatur

- [1] F. Riesz u. B. Sz.-Nagy, Vorlesungen über Funktionalanalysis. Berlin 1956.
- [2] H. Bialy, Iterative Lösung von Funktionalgleichungen erster Art. Z. angew. Math. Mech. 38 (1958), 261—263.

Anschrift: Dr. H. Bialy, Dresden A 20, Brunnenstr. 11

Plemeljsche Randwertformeln für mehrfache Cauchy-Integrale

Von L. Bittner

Sei L ein System von ebenen und im Endlichen verlaufenden Jordanschen Kurvenstücken, die in einer gewissen Umgebung eines speziellen, inneren, einfachen Punktes ζ (\neq Doppelpunkt) glatt sein mögen; sei $t \in L$, $z \in L$ und $\varphi(t)$ eine auf L definierte, in einer gewissen Umgebung von ζ hölderstetige und auf dem Rest von L wenigstens absolut integrierbare Funktion. Die durch

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t - z} \quad \dots \quad (1)$$

dargestellte stückweise holomorphe Funktion nähert sich dann bekanntlich den Grenzwerten

$$\Phi^+(\zeta) = \frac{1}{2} \varphi(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t - \zeta}, \quad \Phi^-(\zeta) = -\frac{1}{2} \varphi(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t - \zeta} \quad \dots \quad (2),$$

falls sich z auf einem nicht-tangentialen Wege, hinsichtlich des Durchlaufungssinnes der Linien L von links bzw. rechts herkommend, dem Punkt ζ nähert. Die Formeln (2) werden nach Plemelj, gelegentlich auch nach Sochozki bzw. Priwalow benannt (siehe [1], [2]). Die Integrale sind als Hauptwertintegrale zu verstehen.

Es hat den Anschein, als ob entsprechende Randwertformeln für ein mehrfaches *Cauchy-Integral*

$$\Phi(z_1, z_2, \dots, z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{L_1} \int_{L_2} \dots \int_{L_n} \frac{\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n}{(t_1 - z_1)(t_2 - z_2) \dots (t_n - z_n)} \quad (3)$$

noch nicht hergeleitet worden sind. Seien L_i und ζ_i ($i = 1, \dots, n$) Liniensysteme und innere Punkte wie oben L und ζ und genüge $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ in jeder Variablen t_i wenigstens in einer gewissen Umgebung jedes ζ_i einer gleichmäßigen H -Bedingung

$$|\varphi(\dots t_i \dots) - \varphi(\dots t'_i \dots)| \leq A_i |t_i - t'_i|^{\mu_i}, \quad 0 < \mu_i \leq 1 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4).$$

Dann werde

$$\int_{L_1} \dots \int_{L_n} \frac{\varphi(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n}{(t_1 - \zeta_1) \dots (t_n - \zeta_n)} \quad \text{durch} \quad \int_{L_1} \frac{dt_1}{t_1 - \zeta_1} \left(\int_{L_2} \frac{dt_2}{t_2 - \zeta_2} \left[\dots \int_{L_n} \frac{dt_n}{t_n - \zeta_n} \right] \right) \quad (5)$$

erklärt und als mehrfaches Hauptwertintegral bezeichnet. Zur Abkürzung werde für

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(\dots t_k \dots)}{t_k - z_k} = I_k \varphi, \quad \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(\dots t_k \dots)}{t_k - \zeta_k} = J_k \varphi \quad (6),$$

$$\varphi(t_1, \dots, t_{k-1}, \zeta_k, t_{k+1}, \dots, t_n) = E_k \varphi$$

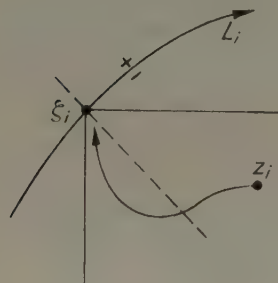
gesetzt.

Es kann nun der Satz bewiesen werden:

Satz: Wenn die Liniensysteme L_i in einer gewissen Umgebung der betrachteten Punkte ζ_i einer *Ljapunow-Bedingung* (= *Hölderbedingung* für die Tangentenrichtungen) genügen, so ist in (5) die Integrationsreihenfolge ohne Belang. In Formeln

$$I_1 I_2 \dots I_n \varphi = I_{k_1} I_{k_2} \dots I_{k_n} \varphi \quad (k_1, k_2, \dots, k_n = \text{Permutation von } 1, 2, \dots, n) \quad (7).$$

Es bezeichne η_i entweder $+1$ oder -1 und $\Phi(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ denjenigen Grenzwert $\lim \Phi(z_1, z_2, \dots, z_n)$, dem sich $\Phi(z_1, \dots, z_n)$ nähert, falls z_i , von der durch η_i angegebenen Seite herkommend, gegen ζ_i strebt. Die Annäherung $z_i \rightarrow \zeta_i$ möge innerhalb eines gewissen nicht-stumpfen Winkelbereiches erfolgen (siehe Bild). Die L_i sollen von nun an einer lokalen *Ljapunow-Bedingung* genügen, damit der letzte Satz gilt.



Sei

$$\Delta_i \varphi = \varphi(\dots t_i \dots) - \varphi(\dots \zeta_i \dots) = \varphi - E_i \varphi = (1 - E_i) \varphi \quad (8).$$

Dann läßt sich von der mit

$$\begin{aligned} \Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_n \varphi &= (1 - E_1)(1 - E_2) \dots (1 - E_n) \varphi \\ &= \varphi + \sum_{v=1}^n (-1)^v \left(\sum_{k_1 < k_2 < \dots < k_v}^{1 \dots n} E_{k_1} E_{k_2} \dots E_{k_v} \varphi \right) \quad (9) \end{aligned}$$

gebildeten Funktionen (3) zeigen, daß sie stetig in den mit $\Delta_1 \dots \Delta_n \varphi$ gebildeten mehrfachen Hauptwertaussdruck (5) übergeht, in Formeln:

$$I_1 I_2 \dots I_n (\Delta_1 \dots \Delta_n \varphi) \rightarrow J_1 J_2 \dots J_n (\Delta_1 \dots \Delta_n \varphi) \quad \text{für } z_i \rightarrow \zeta_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (10).$$

Wegen

$$\varphi = \Delta_1 \dots \Delta_n \varphi - \sum_{v=1}^n (-1)^v \left(\sum_{k_1 < \dots < k_v}^{1 \dots n} E_{k_1} \dots E_{k_v} \varphi \right) \quad (11)$$

ergibt sich mit Hilfe vollständiger Induktion

$$\begin{aligned} \Phi(z_1, \dots, z_n) &= I_1 \dots I_n \varphi \rightarrow \Phi(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \\ &= J_1 \dots J_n \varphi + \sum_{v=1}^n \sum_{k_1 < k_2 < \dots < k_v}^{1 \dots n} \frac{\eta_{k_1} \eta_{k_2} \dots \eta_{k_v}}{2^v} \prod_{k=1}^v (J_{k_k} E_{k_k} E_{k_{k+1}} \dots E_{k_v} \varphi) \\ &= \left(\frac{\eta_1}{2} E_1 + J_1 \right) \left(\frac{\eta_2}{2} E_2 + J_2 \right) \dots \left(\frac{\eta_n}{2} E_n + J_n \right) \varphi \quad (12). \end{aligned}$$

$\sum_{k_1 < k_2 < \dots < k_\nu}^{1, \dots, n}$ bedeutet eine Summe über alle möglichen Indizeskombinationen der Zahlen $1, 2, \dots, n$ zur ν . Klasse, $\prod_{k=1}^n (k_1 \dots k_\nu)$ ein Produkt aller Faktoren der Indizes von $1 \dots n$ mit Ausnahme der Faktoren mit den Indizes k_1, k_2, \dots, k_ν .

Formel (12) stellt die vermißten Plemelj'schen Randwertformeln für ein *Cauchy*-Integral mit mehreren komplexen Veränderlichen dar. Mit

$$E_i^+ \Phi = \Phi \dots \dots (\eta_i = +1), \quad E_i^- \Phi = \Phi \dots \dots (\eta_i = -1) \quad (13)$$

läßt sich das mehrfache Hauptwertintegral in der Summe von (12), nämlich

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n (k_1 \dots k_\nu) J_k E_{k_1} \dots E_{k_\nu} \varphi &= (E_{k_1}^+ - E_{k_1}^-) \dots (E_{k_\nu}^+ - E_{k_\nu}^-) \prod_{k=1}^n (k_1 \dots k_\nu) (E_k^+ + E_k^-) \Phi \\ &= \sum_{(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)} \eta_{k_1} \dots \eta_{k_\nu} \prod_{k=1}^n E_k^{\eta_k} \Phi = \sum_{(\eta_1, \dots, \eta_n)} \eta_{k_1} \dots \eta_{k_\nu} \Phi^{\eta_1, \dots, \eta_n} \quad (14) \end{aligned}$$

durch die Randwerte der stückweise holomorphen Funktion $\Phi(z_1, \dots, z_n)$ darstellen.

$\sum_{(\eta_1, \dots, \eta_n)}$ bedeutet hier eine Summation über sämtliche Zusammenstellungen der 2 Vorzeichen + bzw. - zu Serien der Länge n . Wegen (14) läßt sich jede lineare, singuläre Integralgleichung

$$\sum_{\nu=1}^n \sum_{(k_1, \dots, k_\nu)} a_{k_1, \dots, k_\nu}(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \prod_{k=1}^n (k_1 \dots k_\nu) J_k E_{k_1} \dots E_{k_\nu} \varphi = a(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$$

in ein lineares Randwertproblem einer Funktion mehrerer komplexer Veränderlicher, nämlich in eine Beziehung der Gestalt

$$\sum_{(\eta_1, \dots, \eta_n)} b(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \Phi^{\eta_1, \dots, \eta_n}(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = a(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$$

verwandeln und umgekehrt.

Eine Rechtfertigung, zumal der in (7) und (10) ausgesprochenen Tatsachen, erscheint an anderer Stelle.

Literatur

- [1] Muskelishvili, Singular Integral Equations, Groningen 1953, § 16 ff.
 [2] Priwalow, Randeigenschaften analytischer Funktionen, Berlin 1956, § 2,3.
 Anschrift: Dipl.-Math. L. Bittner, Dresden A 27, Friedrich-Hegel-Str. 10

Exakte Lösungen einer Klasse von nichtlinearen erzwungenen Schwingungen

Von A. Blaser

Da es nicht möglich ist, die allgemeine Gleichung einer erzwungenen, nichtlinearen Schwingung mit einem Freiheitsgrad

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} - D(x, y) + w_0(x) = Z(\tau)$$

(x = dimensionslose, generalisierte Koordinate, τ = dimensionslose Zeit, $y = \frac{dx}{d\tau}$,

$D(x, y)$ = Dämpfungsfunktion mit $y \cdot D(x, y) \leq 0$, $D(x, 0) = 0$, $w_0(x)$ = Kennlinie mit $\frac{dw_0}{dx} \Big|_{x=0} = 1$, $Z(\tau)$ mit $\frac{2\pi}{\eta}$ periodische Zwangserregung),

exakt zu lösen, wird das Schwingungsverhalten des Verbandes mit obiger Gleichung für $D(x, y) = \mp 2\varepsilon w_0(x) y^2$ ($x y \geq 0$) untersucht, wobei für $Z(\tau)$ die sogenannte Impulserregung gewählt wird. H. Kauderer¹⁾ hat die *Duffingsche* Differentialgleichung $\frac{d^2 x}{d\tau^2} + x(1 + \beta x^2) = Z(\tau)$

für diese Zwangserregung, bei der dem Verband rhythmisch positive und negative gleich große Impulse durch momentane Stöße zugeführt werden, exakt gelöst. Es gelingt eine exakte Lösung jedoch auch für jede beliebige, zum Nullpunkt symmetrische Kennlinie für beliebiges konstantes

¹⁾ Ing.-Arch. 28 (1959), S. 154.

$\varepsilon \geq 0$. Man berechnet sich dazu zuerst die Phasenkurven der freien Bewegung und stellt dann durch zwei gleich große, entgegengesetzte vertikale Sprünge, deren Länge gleich der durch den zugeführten Impuls hervorgerufenen Geschwindigkeitsänderung ist, geschlossene Kurvenzüge her. Die Laufzeit des Phasenpunktes zwischen zwei solchen Sprüngen muß gleich der halben Periode der Zwangserregung, also gleich $\frac{\pi}{\eta}$ sein. Die Amplitude läßt sich in der Phaseebene ablesen. Man kann nun diese Konstruktion periodischer Bewegungen rechnerisch verfolgen, d. h. es läßt sich die Zwangsfrequenz η als Funktion der Amplitude X explizit angeben und zu Resonanzdiagrammen für jede Konstante Dämpfungszahl ε und jede konstante Erregerstärke δ auswerten. Wählt man die Erregerstärke δ so, daß die Impulsänderung der einer harmonischen Erregung $p_0 \cos(\eta \tau + \vartheta)$ entspricht, d. h. setzt man $\delta = \frac{2 p_0}{\eta}$, so werden die Ergebnisse implizite Funktionen zwischen η und X , so daß die Verarbeitung zu Resonanzdiagrammen wesentlich schwieriger wird. Man kann aber die dazu gehörigen Resonanzdiagramme durch Interpolation aus sehr vielen Diagrammen für festes δ bekommen. Dieser Weg ist jedoch praktisch nur noch bei der ungedämpften Schwingung möglich, da der Rechenaufwand bei der gedämpften Schwingung sehr groß ist und selbst mit elektronischen Rechenautomaten verhältnismäßig viel Zeit erfordert. — Die Untersuchungen zu dem hier kurz umrissenen Problem sind noch nicht abgeschlossen, so daß insbesondere noch nichts über Stabilität oder Labilität der auftretenden Bewegungsarten ausgesagt werden kann. Außerdem wurden bis jetzt nur Bewegungen untersucht, bei denen die geschlossenen Kurvenzüge in der Phaseebene symmetrisch zum Nullpunkt sind, für die also die zugehörige ungedämpfte Bewegung weg- und zeitsymmetrisch ist. Als Beispiel wurde die Kennlinie $w_0(x) = \operatorname{tg} x / \cos^2 x$ gewählt.

Anschrift: Albrecht Blaser, Garbsen bei Hannover, Berliner Str. 19

Vorteile bipolarer Entwicklungen für die Annäherung analytischer Funktionen im Reellen

Von Uwe T. Bödewadt

Zur näherungsweise Darstellung nicht rationaler Funktionen in einem endlichen Intervall werden vielfach Polynome bevorzugt, weil sie leicht auszuwerten sind und damit z. B. in Ziffernrechenanlagen zu einer Zeitersparnis führen. Sind analytische Funktionen darzustellen, so geht man gewöhnlich von einer Potenzreihenentwicklung oder einer Entwicklung nach *Tschebyschew*-Polynomen aus, um die Näherungspolynome aufzustellen. Die Koeffizienten der Potenzreihe ergeben sich fast unmittelbar aus den Ableitungen der darzustellenden Funktion, sind also leicht mit ausreichender Genauigkeit berechenbar. Jedoch ist die Näherung zwar in der Umgebung des Entwicklungsursprunges sehr gut, aber über größere Intervalle werden zahlreiche Glieder erforderlich.

Demgegenüber liefert die abgebrochene *Tschebyschew*-Reihe (T.-Reihe) nahezu die optimale Darstellung für ein gegebenes Intervall, insofern hiermit eine bestimmte Näherungsgüte durch das Polynom niedrigsten Grades erreicht wird. Jedoch sind die Koeffizienten dieser Reihen in der Regel nur durch langwierige Integrationen zu gewinnen oder aber als Summen unendlicher Reihen, in welche die *Taylor*-Koeffizienten der Funktion eingehen. Außerdem liefert die abgebrochene T.-Reihe auch nicht genau die günstigsten Werte der Koeffizienten für einen bestimmten Grad des Näherungspolynoms. Daher werden die Koeffizienten der im T.-Sinne besten Näherungspolynome vielfach numerisch bestimmt durch Interpolation über eine Reihe von Stützstellen, die iterativ verbessert werden. Für höhere Näherung aber erfordert auch dieses Verfahren selbst bei automatischer Ausführung beträchtliche Zeit und ist in der erreichbaren Genauigkeit durch die Abrundungsfehler beschränkt. Trotz der grundsätzlichen Vorzüge des T.-Verfahrens werden daher noch oft die *Taylor*-Reihen verwendet, deren Koeffizienten sich soviel leichter ermitteln lassen. Dem Nachteil unbefriedigender Konvergenz begegnet man dann durch Unterteilung des Intervalls.

Die bipolaren Reihen scheinen in diesem Zusammenhange noch kaum Beachtung gefunden zu haben. Mit diesem Namen sind hier die Interpolationspolynome bezeichnet, die sich der darstellenden Funktion nicht nur wie die *Taylor*-Reihe in einem Punkt, sondern in zwei verschiedenen Punkten zunehmend anschmiegen. Grundsätzlich sind sie also wohlbekannt und sind auch für andere Zwecke öfters verwendet worden, wie z. B. zur Interpolation im Komplexen oder zur Aufstellung von Quadraturformeln. Im Vergleich einerseits zu *Taylor*-Reihen, andererseits zu

*Tschebyschew*schen Näherungen nehmen sie eine Mittelstellung ein, die sie vorteilhaft erscheinen läßt: ihre Koeffizienten lassen sich mit mäßiger Mühe beliebig genau berechnen, da sie sich nur aus endlichvielen *Taylor*-Koeffizienten zusammensetzen, ihre Konvergenz hingegen ist über ein endliches Intervall oft merklich besser als die der *Taylor*-Reihen, wenn sie auch jener der T.-Entwicklungen unterlegen bleibt. Im folgenden werden die Formeln für bipolare Entwicklungen zusammengestellt.

$f(x)$ sei analytisch und mindestens für $a \leq x \leq b$ regulär. Wir setzen:

$$k = (b - a)^{-1}, \quad c = (a + b)/2, \quad d = (b - a)/2 \quad (1).$$

$$Q(x) = (x - a)(b - x) \quad (2).$$

Die Bipolarreihe läßt sich aus folgendem Ansatz entwickeln: Es sei

$$f_0(x) \equiv f(x).$$

Die Randwerte dieser Funktion sind dann bekannt:

$$A_0 = f_0(a) = f(a), \quad B_0 = f_0(b) = f(b) \quad (3).$$

Für $n = 0$ läßt sich dann $f_n(x)$ durch eine lineare Funktion $L_n(x)$ zwischen diesen beiden Punkten annähern:

$$f_n(x) \approx L_n(x) = A_n + (x - a)k(B_n - A_n) \quad (4).$$

Das Restglied dieser Näherung enthält den Faktor (2) $Q(x)$, multipliziert mit einem Faktor $f_{n+1}(x)$:

$$f_n(x) = L_n(x) + Q(x)f_{n+1}(x) \quad (5).$$

Dieser Faktor ist für $x \neq a, b$ damit definiert:

$$f_{n+1}(x) = [f_n(x) - L_n(x)]/Q(x) \quad (6).$$

Für $x = a, b$ läßt sich diese Funktion durch ihre Grenzwerte ergänzen. Wir setzen also, zunächst für $n = 1$,

$$A_n \equiv f_n(a + 0) = f_n(a), \quad B_n \equiv f_n(b - 0) = f_n(b) \quad (7).$$

Gemäß (4), (5) läßt sich nun diese neue Funktion wieder durch eine lineare Funktion interpolieren mit einem Restglied, das neben dem quadratischen Faktor $Q(x)$ eine neue abgeleitete Funktion $f_{n+1}(x)$ enthält, usw. So findet sich

$$f(x) = L_0 + L_1 Q + L_2 Q^2 + \dots + L_{n-1} Q^{n-1} + R_n \quad (8)$$

mit dem Restglied

$$R_n(x) = Q(x)^n \cdot f_n(x) \quad (9).$$

Hierin gilt

$$\left. \begin{aligned} f_n(x) &= f^{(2n)}(\xi)/(2n)!, \\ |f_n| &\leq \text{Max}_x |f^{(2n)}(x)| \cdot 1/(2n)! \end{aligned} \right\} \quad (10).$$

Ferner hat man, mit den Abkürzungen (1),

$$|Q(x)| \leq (c - a)(b - c) = d^2 \quad (11).$$

Diese Abschätzung trifft aber nicht nur im Intervall (a, b) zu, sondern darüber hinaus in

$$(c - d\sqrt{2}, c + d\sqrt{2}).$$

Somit hat man

$$|R_n| \leq \text{Max} |f^{(2n)}| \cdot d^{2n}/(2n)! \quad (12).$$

Soll z.B. $f(x)$ im Intervall $(-1, +1)$ dargestellt werden und wählt man $a = -1, b = +1$, so wird $c = 0, d = 1, |R_n| \leq \text{Max} |f^{(2n)}|/(2n)!$.

Dieselbe Abschätzung gilt auch für die nach $2n$ Gliedern abgebrochene *Taylor*-Reihe um den Mittelpunkt $x = c$. Doch kann es vorkommen, daß die *Taylor*-Reihe nicht über das ganze Intervall konvergiert, weil $f(x)$ singuläre Stellen im Komplexen hat. Die Bipolarreihe ist hier weniger empfindlich. — Es gibt nun aber auch die Möglichkeit,

$$a = -1/\sqrt{2}, \quad b = +1/\sqrt{2}$$

zu wählen. Dann wird

$$d = 1/\sqrt{2}, \quad |R_n| \leq \text{Max} |f^{(2n)}| \cdot 2^{-n}/(2n)!$$

In diesem Fall ist das Restglied also um den Faktor 2^n kleiner als bei der entsprechenden *Taylor*-Reihe.

Die Koeffizienten der Linearfaktoren werden leichter berechenbar, wenn man sie auf den Mittelpunkt c bezieht:

$$L_n(x) = m_n + p_n(x - c) \quad \dots \quad (13).$$

Als bekannt werden vorausgesetzt die *Taylor-Entwicklungen* von $f(x)$:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots \\ f(x) &= b_0 + b_1(b - x) + b_2(b - x)^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (14),$$

$$a_n = f^{(n)}(a)/n!, \quad b_n = (-1)^n f^{(n)}(b)/n! \quad \dots \quad (15).$$

Diese Beiwerte a_n, b_n werden in ihre geraden und ungeraden Bestandteile gegliedert:

$$c_n = (a_n + b_n)/2, \quad d_n = (b_n - a_n)/2 \quad \dots \quad (16).$$

Dann gelten die Formeln

$$m_n = k^n \left\{ c_n + \sum_{i=1}^{n-1} \left[\binom{n+i-1}{i} - \binom{n+i-1}{i-1} \right] k^i c_{n-i} \right\} \quad \dots \quad (17),$$

$$p_n = 2 k^{n+1} \sum_{i=0}^n \binom{n+i}{i} k^i d_{n-i} \quad \dots \quad (18).$$

Die ersten dieser Formeln lauten:

$$\left. \begin{aligned} m_0 &= c_0, \\ m_1 &= k c_1, \\ m_2 &= k^2 (c_2 + 1 k c_1), \\ m_3 &= k^3 (c_3 + 2 k c_2 + 1 k^2 c_1), \\ m_4 &= k^4 (c_4 + 3 k c_3 + 5 k^2 c_2 + 5 k^3 c_1) \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (19),$$

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= 2 k d_0, \\ p_1 &= 2 k^2 (d_1 + 2 k d_0), \\ p_2 &= 2 k^3 (d_2 + 3 k d_1 + 6 k^2 d_0), \\ p_3 &= 2 k^4 (d_3 + 4 k d_2 + 10 k^2 d_1 + 20 k^3 d_0) \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (20).$$

Es lassen sich Rekursionsformeln aufstellen, die als Probe dienen können:

$$m_n = k^n c_n + \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2} \right]} (-1)^{i-1} \binom{n-i}{i} k^{2i} m_{n-i} \quad \dots \quad (21),$$

$$p_n = 2 k^{n+1} d_n + \sum_{i=1}^{\left[\frac{n+1}{2} \right]} (-1)^{i-1} \left[\binom{n+1-i}{i} + \binom{n-i}{i-1} \right] k^{2i} p_{n-i} \quad \dots \quad (22).$$

Die ersten dieser Rekursionsformeln sehen so aus:

$$\left. \begin{aligned} m_0 &= c_0, \\ m_1 &= k c_1, \\ m_2 &= k^2 c_2 + 1 k^2 m_1, \\ m_3 &= k^3 c_3 + 2 k^2 m_2, \\ m_4 &= k^4 c_4 + 3 k^2 m_3 - 1 k^4 m_2, \\ m_5 &= k^5 c_5 + 4 k^2 m_4 - 3 k^4 m_3 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (23),$$

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= 2 k d_0, \\ p_1 &= 2 k^2 d_1, \\ p_2 &= 2 k^3 d_2 + 3 k^2 p_1, \\ p_3 &= 2 k^4 d_3 + 4 k^2 p_2 - 2 k^4 p_1, \\ p_4 &= 2 k^5 d_4 + 5 k^2 p_3 - 5 k^4 p_2 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (24).$$

Zur Konvergenzfrage ist zu bemerken, daß bei den bezüglich des Mittelpunktes c geraden Funktionen $f(z) = f(2c - z)$ die Linearfaktoren $L_n(z)$ konstant werden, so daß die Bipolarreihe in z eine gewöhnliche Potenzreihe in $w = Q(z)$ ist. Deren Konvergenzkreis $|w| > R$ ist in der z -Ebene eine *Cassinische Kurve*

$$|z - a| \cdot |z - b| < R,$$

die nur für

$$R \geq |Q(c)| = d^2$$

die ganze reelle Strecke (a, b) enthält. Sind also Rand und Inneres der speziellen *Cassinischen Kurve*

$$|z - a| \cdot |z - b| = d^2$$

(d. h. der Lemniskate mit den Polen a, b) singularitätenfrei, so konvergiert die Bipolarreihe mindestens in dem Intervall

$$c - d\sqrt{2} \leq x \leq c + d\sqrt{2},$$

und zwar noch darüber hinaus innerhalb der *Cassinischen Kurve* durch den nächsten singulären Punkt. Dasselbe gilt aber auch für nicht gerade Funktionen, da diese sich stets als $f(z) = g(z) + (z - c)h(z)$ mit geraden $g(z) = g(2c - z)$, $h(z) = h(2c - z)$ darstellen lassen. Die Bipolarreihen haben also ein Konvergenzgebiet, dessen längliche Form sich für die Aufgabe der Darstellung über einer Intervallstrecke besser eignet als die Kreisform der Potenzreihen.

Die bipolaren Polynome bedürfen für die Auswertung nicht der Umordnung in die Normalform, da sie bereits Abschnitte einer Potenzreihe sind, wenn auch mit linear veränderlichen Koeffizienten. Wird das Darstellungsintervall bei größerer Länge unterteilt und nimmt man die Teilungspunkte als Entwicklungspole, so schließen sich die einzelnen Entwicklungen von selbst glatt aneinander, was bei *Taylor-Reihen* und *T.-Näherungen* in der Regel nicht eintritt.

Anschrift: Dr. U. T. Bödewadt, Rom, Via M. Malpighi, 12 A

Über ein für die Praxis geeignetes Normdiagramm zur Lösung der Gleichungen dritten Grades

Von K. Bögel

Zur raschen approximativen Auflösung einer Gleichung dritten Grades findet sich in der Literatur (beispielsweise in Rothe, Höhere Mathematik I (1953) p. 110) ein Diagramm, zu dessen Anwendung man die Gleichung einer *Tschirnhaus-Transformation* unterwerfen muß, welche das quadratische Glied zum Verschwinden bringt.

Diese Methode hat drei Nachteile: erstens ist die Berechnung der Transformation schwerfällig und damit zeitraubend, zweitens enthält diese Berechnung systematische Fehlerquellen, welche das Ergebnis bis zur Unbrauchbarkeit verzerren können und drittens verändert die Transformation den „Stabilitätszustand“ der Gleichung (das heißt das Vorzeichen der Realteile ihrer Wurzeln). Alle drei Nachteile lassen sich bequem vermeiden, wenn man die Gleichung so transformiert, daß sowohl ihr Hauptkoeffizient als auch der Koeffizient des quadratischen Gliedes den Wert Eins annehmen.

Die so entstehenden Gleichungen $u^3 + u^2 + A_1 u + A_0 = 0$ lassen sich als Punkte in einem (A_1, A_0) -Koordinatensystem darstellen.

Die reellen Lösungen dieser Gleichungen bezeichnen wir mit c , die komplex konjugierten mit $d \pm \nu i$. Dann liegen die Bilder aller Gleichungen mit übereinstimmendem c bzw. $d = -\frac{1+c}{2}$ auf einer Geraden. Diese Geraden werden mit dem Wert von c bzw. d beziffert. Trägt man noch die Linien $\nu = \text{const.}$ ein, so ist das Diagramm gebrauchsfertig.

Weitere Einzelheiten s. in: Wiss. Ztschr. der Hochsch. f. Elektrotechnik Ilmenau 2 (1956), 1.

Anschrift: Prof. Dr. K. Bögel, Ilmenau (Thür.), Herderstr. 38

Zur Fehlerabschätzung beim Iterationsverfahren linearer Randwertprobleme

Von Werner Bollermann

Zur linearen Randwertaufgabe als gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung $2m$:

$$L[y] = M[y] - a N[y] = r, \quad U_j[y] = 0 \quad ([2], 1.2, 1) \dots \dots \dots (1)$$

möge die Eigenwertaufgabe:

$$M[\bar{z}] = k N[\bar{z}], \quad U_j[\bar{z}] = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

die Voraussetzungen des Entwicklungssatzes erfüllen ([1], 10.8). Der Parameter a sei beschränkt zu:

$$0 < |a| < k_1 \quad \dots \dots \dots (3).$$

Für das Iterationsverfahren (ausgehend von u_0 mit $N[u_0]$ stetig in $a \leq x \leq b$):

$$M[u_{n+1}] = a N[u_n] + r, \quad U_j[u_{n+1}] = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad \dots \dots \dots (4)$$

gilt dann die Konvergenzaussage: „Die Folge der nach (4) iterierten Funktionen u_{n+1} konvergiert einschließlich ihrer Ableitungen bis zur $(m-1)$ -ten Ordnung gleichmäßig gegen y bzw. entsprechende Ableitungen als einzig existierende Lösung der Aufgabe (1)“.

Die Unterschiede $z_n = u_n - y$ genügen der Di-Gleichung:

$$M[z_{n+1}] = a N[z_n], \quad U_j[z_{n+1}] = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad \dots \dots \dots (5)$$

und der Entwicklungssatz liefert die gleichmäßig konvergenten Reihen:

$$|z_{n+1}^{(p)}| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{|a|}{k_i} \right)^n |c_{1,i}| |\bar{z}_i^{(p)}| \quad \text{mit} \quad c_{1,i} = \int_a^b z_1 N[\bar{z}_i] dx \quad \dots \dots \dots (6)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots; \quad p = 0, 1, 2, \dots, m-1).$$

Eine Abschätzung der Koeffizienten $c_{1,i}$ (in Abhängigkeit vom Anfangsfehler $|z_0|$) gelingt mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung und ermöglicht so eine konkrete Auswertung von (6) als Fehlerabschätzung, wenn eine „Spezielle Eigenwertaufgabe“ (2) vorliegt:

$$N[\bar{z}] = g \bar{z}, \quad g > 0, \quad c_{1,i} = \int_a^b z_1 g \bar{z}_i dx = \int_a^b M[\bar{z}_i]/k_i z_1 dx = \int_a^b M[z_1] \bar{z}_i/k_i dx \quad \dots \quad (7).$$

$$c_{1,i}^2 = \left[\int_a^b M[z_1] \bar{z}_i/k_i dx \right]^2 = \left[1/k_i \int_a^b \frac{M[z_1]}{\sqrt{g}} \sqrt{g} \bar{z}_i dx \right]^2 \leq \left(\frac{1}{k_i} \right)^2 \int_a^b \frac{M^2[z_1]}{g} dx \quad \dots \dots \dots (8)$$

bei Normierung der Eigenfunktionen:

$$\int_a^b g \bar{z}_i^2 dx = 1, \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Ergebnis:

$$|c_{1,i}| \leq \frac{1}{k_i} \sqrt{\int_a^b \frac{M^2[z_1]}{g} dx} = \frac{|a|}{k_i} \sqrt{\int_a^b g z_0^2 dx}, \quad (i = 1, 2, \dots) \quad \dots \dots \dots (9)$$

bei Beachtung von Gleichung (5).

Einsetzen dieser Abschätzung (9) in die Reihendarstellung (6) liefert eine Fehlerabschätzung zum Iterationsverfahren (4):

$$|z_{n+1}^{(p)}| \leq \sqrt{\int_a^b g z_0^2 dx} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{|a|}{k_i} \right)^{n+1} |\bar{z}_i^{(p)}|; \quad \dots \dots \dots (10)$$

Voraussetzung $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\bar{z}_i^{(p)}|}{(k_i)^s}$ ist konvergent; ($p = 0, 1, 2, \dots, l \leq m-1, n = s-1, s, s+1, \dots$ mit s als natürliche Zahl).

Auch bei Rückgriff auf eine bekannte benachbarte Eigenwertaufgabe

$$M[z^*] = k^* g^* z^*, \quad U_j[z^*] = 0, \quad (g^* > 0) \quad \dots \dots \dots (11)$$

lassen sich Konvergenzaussagen mit Fehlerabschätzung nachweisen. Mit

$$c_0 = |a| \sqrt{\int_a^b (g^2/g^*) z_0^2 dx}, \quad c_1 = |a| \sqrt{\int_a^b (g^2/g^*) S_0^2 dx} \quad \text{und} \quad S_p = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|z_i^{*(p)}|}{k_i^*}, \quad (z_i^* \text{ normiert}) \quad (12)$$

erhält man das Ergebnis:

$$|z_{n+1}^{(p)}| \leq c_0 (c_1)^n S_p, \quad (n = 0, 1, 2, \dots; \quad p = 0, 1, \dots, l \leq m-1) \dots (13);$$

Voraussetzung: Die Reihendarstellung zu S_p (12) ist konvergent für $p \neq 0$ und gleichmäßig konvergent für $p = 0$, $c_1 < 1$ [womit die Konvergenz des Iterationsverfahrens gesichert ist].

Eine Abschätzung des Anfangsfehlers $|z_0|$ (5) ist stets gegeben, wenn man die Lösung y selbst abschätzen kann etwa zu

$$|y| \leq h \cdot \beta \dots (14),$$

($\beta(x) \geq 0$ und h als positive Konstante). Diese Abschätzung ist unter anderem gesichert, wenn mit der Greenschen Funktion ($G(x, \xi)$ zu $M[y]$, $U_j[y] = 0$) folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$\int_a^b |G(x, \xi)| [|a| g(\xi) h \beta(\xi) + |r(\xi)|] d\xi \leq h \beta(x), \quad a \leq x \leq b \dots (15).$$

[Mit einem Ansatz $|u_0| \leq h \cdot \beta$ folgt aus (15) und der gleichmäßigen Konvergenz (3—4) $|y| \leq h \cdot \beta$.]

Eine weitere Abschätzung (14) ermöglicht die Eigenwertaufgabe $L[\tilde{y}] = \tilde{k} q \tilde{y}$, $U_j[\tilde{y}] = 0$, ($q > 0$) (vgl. 1); da für sie unter den getroffenen Voraussetzungen (1—3) der Entwicklungssatz ([1], 10.8) auch gültig ist:¹⁾

$$|y| \leq \sqrt{\int_a^b \frac{r^2}{q} dx} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\tilde{y}_i|}{\tilde{k}_i}, \quad \left(\int_a^b q \tilde{y}_i^2 dx = 1 \right) \dots (16);$$

Voraussetzung $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\tilde{y}_i|}{\tilde{k}_i}$ ist konvergent.

Beispiel: $-y'' + e^x y = 1$, $y_0 = y_1 = 0$, ($a = -1$, $g = e^x$).

Als Randwertaufgabe monotoner Art ([2], 4.9, III) ist $0 \leq y$ nachweisbar. Mit $|y| \leq 0,1587$ (15) folgt aus $u_0 = 0,0794$ $|z_0| \leq 0,0794$. Bei Rückgriff auf $-y'' = k y$, $y_0 = y_1 = 0$ (vgl. 11) folgt aus der Abschätzung (13): $|z_{n+1}| \leq 0,142 (0,2866)^n S_0$. Fehler in % bei $x = 0,5$: ± 26 (zu $n = 1$), $\pm 7,3$ (2), $\pm 2,2$ (3), $\pm 0,6$ (4).

Literatur

- [1] L. Collatz, Eigenwertaufgaben mit techn. Anwendungen, 1949.
[2] L. Collatz, Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, II., 55.

Anschrift: Dr. W. Bollermann, Hannover-Kirchrode, Rutenbergstr. 24

¹⁾ Zur direkten Entwicklung der Lösung y nach Eigenfunktionen ohne die Voraussetzung der Entwickelbarkeit von r ([2], 4.6, V) erfolgt eine Mitteilung in Kürze.

Über den endlichen Bestandteil divergenter Integrale und singuläre Integralgleichungen vom Volterra-Faltungstypus

Von P. L. Butzer

Singuläre Integralgleichungen vom Faltungstypus, wie z.B. die Abelsche Integralgleichung

$$\int_0^t \frac{f(u)}{(t-u)^\alpha} du = g(t) \quad (t > 0)$$

wo die Ordnung α des Unendlichwerdens des Kernes kleiner als 1 ist, sind mit ihren Lösungen in der Literatur schon lange bekannt. Ist jedoch die Ordnung $\alpha \geq 1$, so könnte man das divergente Integral im Sinne des Hadamardschen endlichen Bestandteiles interpretieren (vgl. R. Sauer, Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen, 1958, S. 214). In diesem Vortrag werden Integralgleichungen von der ersten, sowohl wie von der zweiten Art, für die obigen zwei Fälle betrachtet, und frühere Ergebnisse (P. L. Butzer, Anwendung des Operatorenkalküls von J. Mikusiński auf Integralgleichungen vom Faltungstypus, Archive f. Rational Mech. and Analysis, 2 (1958) S. 114—128) werden fortgesetzt.

Es seien nun einige singuläre Gleichungen erster Art, die sich in geschlossener Form lösen lassen, genannt. Hier bedeutet „FP“ den *Hadamardschen* endlichen Bestandteil des Integrals, $v(t)$ die Funktion

$$v(t) = \int_0^\infty \frac{t^u}{\Gamma(u+1)} du$$

und $\gamma = 0,577216 \dots$ die *Eulersche* Konstante.

Die erste der folgenden Gleichungen ist die bekannte *Abelsche* Gleichung. Die Beweismethoden der Gleichungen (2)–(6) beruhen auf einer wesentlichen Erweiterung des Operatorenkalküls von Mikusiński; die Methoden der klassischen Analysis scheinen hier ohne Erfolg zu sein.

	Integralgleichung	Lösung
1.	$\int_0^t \frac{f(u)}{(t-u)^{1/2}} du = g(t),$	$f(t) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \left[\int_0^t \frac{g(u)}{(t-u)^{1/2}} du \right],$
2.	$FP \int_0^t \frac{f(u)}{(t-u)} du = g(t),$	$f(t) = -\frac{d}{dt} \left[\int_0^t g(u) v[(t-u)e^\gamma] du \right],$
3.	$FP \int_0^t \frac{f(u)}{(t-u)^{3/2}} du = g(t),$	$f(t) = -\frac{1}{2\pi} \left[\int_0^t \frac{g(u)}{(t-u)^{1/2}} du \right],$
4.	$\begin{cases} FP \int_0^t \frac{f(u)}{(t-u)^2} du = g(t), \\ f(0) = 0 \end{cases}$	$f(t) = \int_0^t g(u) v[(t-u)e^{1+\gamma}] du,$
5.	$\begin{cases} FP \int_0^t \frac{f(u)}{(t-u)^{5/2}} du = g(t), \\ f(0) = 0 \end{cases}$	$f(t) = \frac{3}{2\pi} \int_0^t (t-u)^{1/2} g(u) du,$
6.	$\begin{cases} FP \int_0^t \frac{f(u)}{(t-u)^3} du = g(t), \\ f(0) = f'(0) = 0 \end{cases}$	$f(t) = -2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} g(u) v[(t-u)e^{\frac{3}{2}+\gamma}] du.$

Die Lösung der allgemeinen Gleichung mit Ordnung $\alpha = k$, k eine natürliche Zahl ≥ 1 , welche die obigen Gleichungen als Sonderfälle enthält, läßt sich auch darstellen. Entsprechendes gilt für $\alpha = k + \beta$, mit einer natürlichen Zahl $k \geq 1$ und $0 < \beta < 1$.

Es werden auch spezielle Integralgleichungen zweiter Art betrachtet. So hat z.B. die Gleichung

$$FP \int_0^t \frac{f'(u)}{(t-u)} du + g(t) = f(t) \quad (t > 0)$$

die Lösung

$$f(t) = \int_0^t g(u) h(t-u) du + f(0) \left[1 + \int_0^t h(u) du \right],$$

wo

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{pt}}{p(\gamma - \log p) - 1} dp$$

ist, mit einer hinreichend großen positiven Zahl c .

Die Gleichung

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} F P \int_0^1 \frac{f(u)}{(t-u)^{3/2}} du + \frac{1}{\sqrt{\pi t}} = f(t) \quad (t > 0)$$

hat die Lösung

$$f(t) = e^t (1 - \operatorname{erf} \sqrt{t}),$$

wo $\operatorname{erf} t$ das Fehlerintegral bedeutet.

Die Theorie, auf die sich die obigen Beispiele stützen, allgemeine Sätze mit den entsprechenden Voraussetzungen über die gegebene Funktion $g(t)$ und die gesuchte Funktion $f(t)$, werden demnächst erscheinen.

Anschrift: Prof. Dr. P. L. Butzer, Aachen, Techn. Hochschule, Math. Inst.

Neuere Lösungsmethode von linearen Differentialgleichungssystemen höherer Ordnung

Von K. Csébfalvi

Es ist bekannt, daß ein lineares Differentialgleichungssystem n -ter Ordnung, bestehend aus m Gleichungen, durch bekannte Transformation auf ein System erster Ordnung zurückführbar ist. Dieses System besitzt aber schon eine Koeffizientenmatrix nm -ter Ordnung, und damit stößt die effektive Ausrechnung der Lösung oft auf Schwierigkeiten, wegen der meistens hohen Ordnung dieser Koeffizientenmatrix. Diese Schwierigkeiten melden sich hauptsächlich dann, wenn die Koeffizientenmatrizen des ursprünglichen Gleichungssystems paarweise nicht vertauschbar sind, und hiermit z. B. E. Egervárys Verfahren zur kanonischen Zerlegung der aus paarweise vertauschbaren Blöcken bestehenden Hypermatrizen nicht anwendbar ist.

Bei in der technischen Praxis ziemlich allgemeinen Voraussetzungen können wir aber die von den Anfangsbedingungen abhängende explizite Lösung des zu untersuchenden Differentialgleichungssystems herstellen, mittels Operationen nur mit solchen Matrizen, deren Ordnung mit der Anzahl der Gleichungen des Systems übereinstimmt, und somit von der Ordnung des Systems unabhängig ist.

Betrachten wir das folgende — in vektorieller Form dargestellte — lineare Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten:

$$\frac{d^n}{dt^n} \mathbf{x} = \mathbf{A}_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \mathbf{x} + \mathbf{A}_{n-2} \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} \mathbf{x} + \cdots + \mathbf{A}_1 \frac{d}{dt} \mathbf{x} + \mathbf{A}_0 \mathbf{x} + \mathbf{v}(t) \quad (1)$$

wo die Matrizen

$$\mathbf{A}_k = [a_{ij}^{(k)}]; \quad (i, j = 1, 2, \dots, m)$$

nicht unbedingt vertauschbar sind,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_m(t) \end{bmatrix}.$$

Es seien die zum Differentialgleichungssystem gehörigen Anfangsbedingungen die folgenden:

$$\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \mathbf{x} \Big|_{t=0} = \mathbf{x}_0^{(k-1)}; \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Führen wir die folgende Bezeichnung ein:

$$\mathbf{G}(\lambda) = [\mathbf{A}_0 + \lambda \mathbf{A}_1 + \cdots + \lambda_{n-1} \mathbf{A}_1^{n-1} - \lambda^n \mathbf{E}].$$

Wenn nun die Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots \lambda_{mn}$ der charakteristischen Gleichung

$$\mathfrak{D}(\lambda) \equiv \det \mathbf{G}(\lambda) = 0$$

alle einfach sind, können wir die von den Anfangsbedingungen abhängende explizite Lösung des Systems (1) in folgender Form aufschreiben

$$x = \sum_{k=1}^{m_n} e^{\lambda_k t} \frac{b_k}{c_k} r_k + \int_0^t \sum_{k=1}^{m_n} e^{\lambda_k(t-\tau)} \frac{s_k^* v(\tau)}{c_k} r_k d\tau,$$

wo

$$r_k s_k^* = \text{adj } G(\lambda_k),$$

d. h. der Spaltenvektor r_k und der Zeilenvektor s_k^* durch eine beliebige dyadische Zerlegung der Matrix $[\text{adj } G(\lambda_k)]$ herstellbar ist, und wo

$$\bar{b}_k = \begin{cases} s_k^* \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \lambda_k^{\mu-\nu} A_{\mu} x_0^{(\nu-1)}, & \text{wenn } \lambda_k \neq 0 \\ -s_k^* \left\{ \sum_{\nu=1}^{n-1} A_{\nu} x_0^{(\nu-1)} - x_0^{(n-1)} \right\}, & \text{wenn } \lambda_k = 0 \end{cases}$$

und

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_k} s_k^* \left\{ \sum_{\nu=1}^{n-1} (n-\nu) \lambda_k^{\nu-1} A_{\nu-1} + \lambda_k^n E \right\} r_k, & \text{wenn } \lambda_k \neq 0, \\ -s_k^* A_1 r_k, & \text{wenn } \lambda_k = 0. \end{cases}$$

Diese erhaltene explizite Lösung kann man besonders dann anwenden, wenn dasselbe Differentialgleichungssystem bei verschiedenen Anfangsbedingungen und Störungsfunktionen zu lösen ist. Diese Lösungsform ermöglicht es, daß man Differentialgleichungssysteme von vorgeführtem Typ auch mit Rechnern minderer Kapazität handhaben kann.

Literatur

- [1] E. Egerváry, „On a property of the projector matrices, and its applications to the canonical representation of matrix functions.“ *Acta Scientiarum Mathematicarum* 15 (1953), 1—6.

Anschrift: Dipl. Math. Karl Csébfalvi, Budapest XII, Mártonhegyi ut 28

Ein Entwicklungssatz bei linearen, selbstadjungierten, volldefiniten Eigenwertproblemen gewöhnlicher Differentialgleichungen

Von Werner Dück

Für lineare, selbstadjungierte, volldefinite Eigenwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen ist die Entwickelbarkeit einer Vergleichsfunktion in eine *Fourier-Reihe* nach den Eigenfunktionen auf Grund der Untersuchungen von Kamke gesichert, wenn das Problem zusätzlich noch die Voraussetzung der Abgeschlossenheit erfüllt. In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, daß man zum Beweis des Entwicklungssatzes auf die Abgeschlossenheit der Aufgabe verzichten kann, wenn man an ihrer Stelle eine neue Voraussetzung einführt, deren Gültigkeit im Spezialfalle meist leichter nachprüfbar ist.

1. Problemstellung

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$M y - \lambda N y = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

mit den linearen homogenen gewöhnlichen Differentialausdrücken

$$M y = \sum_{i=0}^m (-1)^i \{f_i(x) y^{(i)}(x)\}^{(i)},$$

$$N y = \sum_{i=0}^n (-1)^i \{g_i(x) y^{(i)}(x)\}^{(i)}.$$

Dabei sind die $f_i(x)$ und $g_i(x)$ gegebene, reelle, i -mal im Grundintervall $[a, b]$ stetig differenzierbare Funktionen. Ferner wird

$$f_m(x) \neq 0, \quad g_n(x) \neq 0, \quad 0 \leq n < m$$

vorausgesetzt. Zur Differentialgleichung treten noch $2m$ voneinander unabhängige, lineare homogene Randbedingungen

$$U_j(y) = \sum_{i=0}^{2m-1} \{\alpha_{ij} y^{(i)}(a) + \beta_{ij} y^{(i)}(b)\} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2m \quad (2)$$

mit gegebenen reellen Konstanten α_{ij}, β_{ij} hinzu.

Das Eigenwertproblem wird weiterhin als selbstadjungiert und volldefinit vorausgesetzt¹⁾.

Zur Vereinfachung der Schreibweise führen wir die Abkürzung

$$[u, v] = \int_a^b u(x) N v(x) dx \quad (3)$$

ein. Dabei sollen die Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ die für diese Verknüpfung notwendigen Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsvoraussetzungen erfüllen. Mit V wollen wir den Raum bezeichnen, der sämtliche Vergleichsfunktionen (sie sind im Grundintervall $2m$ -mal stetig differenzierbar und genügen allen Randbedingungen) einschließlich der im Grundintervall identisch verschwindenden Funktion enthält. Dann stellt $[u, v]$ in V wegen der gemachten Voraussetzungen eine skalare Produktbildung dar.

Erfüllt die Eigenwertaufgabe die angegebenen Voraussetzungen, so folgt aus den Untersuchungen von Kamke²⁾, daß jede Vergleichsfunktion $u(x)$ der Parsevalschen Gleichung

$$[u, u] = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \quad \text{mit} \quad c_i = [u, v_i], \quad u \in V \quad (4)$$

genügt. Dabei werden mit $v_i(x)$ die entsprechend der Gleichung

$$[v_i, v_j] = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases} \quad (5)$$

orthonormierten Eigenfunktionen des Problems bezeichnet. Weiterhin konvergieren dann die mit diesen Fourier-Koeffizienten c_i gebildete Fourier-Reihe nach den Eigenfunktionen und die durch gliedweise k -malige Differentiation entstehenden Reihen

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i v_i^{(k)}(x) \quad 0 \leq k \leq m-1$$

im Grundintervall gleichmäßig.

Wir denken uns die Randbedingungen in bekannter Weise in wesentliche und restliche Randbedingungen aufgeteilt. Eine im Grundintervall $(m-1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion, welche den wesentlichen Randbedingungen genügt, soll in dieser Arbeit eine zulässige Funktion genannt werden. Neben dem Raum V der Vergleichsfunktionen werden wir im folgenden noch den Raum Z betrachten, der sämtliche zulässigen Funktionen und die im Grundintervall identisch verschwindende Funktion enthält.

Der Beweis des Entwicklungssatzes wird von Kamke unter der zusätzlichen Voraussetzung geführt, daß die Aufgabe abgeschlossen ist. Das ist dann der Fall, wenn $y(x) \equiv 0$ die einzige Funktion in Z ist, welche der Gleichung

$$[y, v] = 0$$

für jedes $v \in V$ genügt.

Ist diese zusätzliche Voraussetzung erfüllt, so folgt aus den Überlegungen von Kamke, daß sich jede Vergleichsfunktion $u(x)$ in eine Fourier-Reihe nach den Eigenfunktionen entwickeln läßt

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i v_i(x),$$

welche im Grundintervall gleichmäßig konvergiert; diese Reihe kann gliedweise $(m-1)$ -mal differenziert werden.

¹⁾ Begriffe aus der Eigenwerttheorie, die in dieser Arbeit nicht näher erläutert werden, werden im Sinne von L. Collatz, Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, Leipzig 1949, Akademische Verlagsgesellschaft, verwendet.

²⁾ E. Kamke, Über die definiten selbstadjungierten Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen III, Math. Zeitschr. 46 (1940), S. 251–286.

Für umfangreiche Klassen von Eigenwertproblemen ist die Abgeschlossenheit der Aufgabe nachgewiesen worden. Im Einzelfall kann jedoch der Nachweis der Abgeschlossenheit des Problems große Schwierigkeiten bereiten. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, an die Stelle der Abgeschlossenheit des Problems eine Voraussetzung zu setzen, welche meist leichter nachprüfbar sein wird. Auf eine solche Voraussetzung wird man sofort geführt, wenn man sich nach einem geeigneten Skalarprodukt im Raum Z der zulässigen Funktionen umsieht. Die folgenden Betrachtungen sind durch die Untersuchungen von Kamke bereits weitgehendst vorbereitet.

2. Angabe der Voraussetzungen des Entwicklungssatzes

Zur Angabe eines Skalarproduktes im Raum Z der zulässigen Funktionen formen wir das Integral in (3) um. Nach der *Dirichletschen* Formel gilt für $u \in Z$, $v \in V$:

$$[u, v] = \sum_{i=0}^n \int_a^b g_i(x) u^{(i)}(x) v^{(i)}(x) dx + S(u, v) \Big|_a^b; \quad u \in Z, v \in V.$$

Im *Dirichletschen* Restteil $S(u, v) \Big|_a^b$ können noch Ableitungen der Vergleichsfunktion $v(x)$ bis zur Ordnung $2n - 1$ auftreten. Diesen Restteil formt Kamke³⁾ mit Hilfe der Randbedingungen so um, daß in ihm nur noch Ableitungen bis zur Ordnung $m - 1$ auftreten. Der so umgeformte Restteil heißt nach Kamke reduzierter *Dirichletscher* Restteil und besitzt die Gestalt $\mathfrak{r}'(u) \mathfrak{M} \mathfrak{r}(v)$, wobei mit $\mathfrak{r}(u)$ bzw. $\mathfrak{r}(v)$ der durch die freien Randableitungen bestimmte Spaltenvektor und mit \mathfrak{M} eine reelle, symmetrische Matrix bezeichnet werden.

Ohne Rücksicht auf die Herleitung kann nun im Raum Z der zulässigen Funktionen eine skalare Produktbildung durch die Gleichung

$$\{u, v\} = \sum_{i=0}^n \int_a^b g_i(x) u^{(i)}(x) v^{(i)}(x) dx + \mathfrak{r}'(u) \mathfrak{M} \mathfrak{r}(v); \quad u, v \in Z \quad \dots \dots \dots (6)$$

definiert werden, wenn zusätzlich noch gefordert wird, daß für jede im Grundintervall nicht identisch verschwindende Funktion aus Z

$$\{u, u\} > 0, \quad u \in Z \quad \dots \dots \dots (7)$$

gilt. Denn in (6) treten wegen $n < m$ nur noch Ableitungen bis zur Ordnung $m - 1$ auf, und alle Axiome für Skalarprodukte sind dann erfüllt. Für Elemente aus V gilt natürlich

$$[u, v] = \{u, v\}, \quad u, v \in V \quad \dots \dots \dots (8).$$

Die Entwickelbarkeit einer Vergleichsfunktion in eine *Fourier-Reihe* nach den Eigenfunktionen wird in dieser Arbeit unter Verzicht auf die Voraussetzung der Abgeschlossenheit des Problems unter der Annahme bewiesen werden, daß $\{u, v\}$ in Z eine skalare Produktbildung darstellt. Für die hier untersuchten linearen, selbstadjungierten, volldefiniten Eigenwertprobleme bedeutet das, daß zusätzlich noch die Voraussetzung (7) erfüllt sein muß.

Bei den meisten in der Praxis auftretenden Eigenwertproblemen ist der *Dirichletsche* Restteil gleich Null oder enthält zum mindesten nur Ableitungen bis zur Ordnung $m - 1$, womit sich die Bestimmung des reduzierten *Dirichletschen* Restteils erübrigt. Dadurch vereinfacht sich die Nachprüfung der Voraussetzung (7). Die Gültigkeit der Voraussetzung (7) wird in Beispielen durch den Nachweis der Volldefinitheit des Problems meist mitgeliefert.

3. Beweis des Entwicklungssatzes

Bezeichnen wir mit $u(x)$ eine Vergleichsfunktion und definieren wir eine Funktion $w(x)$ durch die Gleichung

$$w(x) = u(x) - \sum_{i=1}^{\infty} c_i v_i(x); \quad c_i = [u, v_i],$$

so stellt nach den Ergebnissen der angeführten Untersuchungen von Kamke $w(x)$ eine $(m - 1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion dar, welche auch den wesentlichen Randbedingungen genügt, da $u(x)$ und die Eigenfunktionen $v_i(x)$ diese Eigenschaft besitzen. Die Funktion $w(x)$ gehört also dem Raum Z an. Der Entwicklungssatz ist wegen (7) bewiesen, wenn wir

$$\{w, w\} = 0 \quad \dots \dots \dots (9)$$

zeigen können. Das ist durch einfachste funktionalanalytische Überlegungen möglich.

³⁾ E. Kamke, Über die definiten selbstadjungierten Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen IV, Math. Zeitschr. 48 (1942), S. 67—100.

Wir setzen

$$w_p(x) = u(x) - \sum_{i=1}^p c_i v_i(x)$$

und berechnen das Skalarprodukt $\{w_p, w_p\}$ unter Beachtung bekannter, für die skalare Produktbildung gültiger Beziehungen:

$$\{w_p, w_p\} = \{u, u\} - 2 \sum_{i=1}^p c_i \{u, v_i\} + \sum_{i,j=1}^p c_i c_j \{v_i, v_j\}.$$

Nun gilt für die Elemente aus V Gleichung (8), und unter Berücksichtigung von (5) und der Definitionsgleichung der *Fourier-Koeffizienten* ergibt sich

$$\{w_p, w_p\} = [u, u] - \sum_{i=1}^p c_i^2.$$

Die Funktion $u(x)$ genügt als Vergleichsfunktion der *Parsevalschen* Gleichung (4), so daß wir erhalten

$$\{w_p, w_p\} = \sum_{i=p+1}^{\infty} c_i^2.$$

Damit folgt wieder wegen der *Parsevalschen* Gleichung für die Vergleichsfunktion $u(x)$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \{w_p, w_p\} = 0 \quad \dots \dots \dots (10).$$

Andererseits gilt trivialer Weise

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \{w - w_p, w - w_p\} = 0,$$

woraus wegen der Stetigkeit des Skalarproduktes

$$\{w, w\} = \lim_{p \rightarrow \infty} \{w_p, w_p\}$$

folgt. Wegen (10) ist damit (9) und die Gültigkeit des Entwicklungssatzes bewiesen.

4. Folgerungen aus dem Entwicklungssatz

Für umfangreiche Klassen technisch wichtiger Eigenwertprobleme kann die Gültigkeit des Entwicklungssatzes sofort nachgewiesen werden.

Betrachten wir z. B. die speziellen Eigenwertprobleme, bei denen $N y = g_0(x) y$ ist. Dann ist der *Dirichletsche* Restteil gleich Null, und wir erhalten unmittelbar für das Skalarprodukt (6):

$$\{u, v\} = \int_a^b g_0(x) u(x) v(x) dx.$$

Die Voraussetzung (7) ist z. B. erfüllt, wenn $g_0(x) > 0$ ist.

Auch für einige Probleme der Eingliedklasse läßt sich der Entwicklungssatz leicht beweisen. Bei den Problemen der Eingliedklasse ist

$$\int_a^b u N v dx = \int_a^b g_n(x) u^{(n)}(x) v^{(n)}(x) dx.$$

Der *Dirichletsche* Restteil ist wieder gleich Null, und wir können unmittelbar für das Skalarprodukt (6) schreiben:

$$\{u, v\} = \int_a^b g_n(x) u^{(n)}(x) v^{(n)}(x) dx.$$

Verschwindet nun $g_n(x)$ in keinem Teilintervall des Grundintervalles identisch, und gibt es außer der im Grundintervall identisch verschwindenden Funktion keine Funktion in Z , für die $u^{(n)}(x) \equiv 0$ ist; oder ist $g_n(x) > 0$, und die wesentlichen Randbedingungen sind so beschaffen, daß

$$y^{(i)}(a) y^{(i)}(b) = 0 \quad \text{für } i = 0, 1, \dots, n-1$$

gilt, so ist die Bedingung (7) sofort erfüllt, und damit die Entwickelbarkeit der Vergleichsfunktionen dieser Probleme gesichert. Der hier angegebene Entwicklungssatz für Probleme der Eingliedklasse ist etwas allgemeiner als der aus der Literatur für diese Aufgaben bekannte Entwicklungssatz.

Der Entwicklungssatz gilt auch für die betrachteten linearen, selbstadjungierten und volldefiniten Eigenwertprobleme, bei denen sämtliche Randbedingungen wesentlich sind, denn für diese Probleme ist die Voraussetzung (7) schon wegen der Volldefinitheit erfüllt.

5. Einschränkungen der Voraussetzungen des Entwicklungssatzes

Der Entwicklungssatz kann leicht unter geringeren Voraussetzungen bewiesen werden. Betrachten wir das Eigenwertproblem

$$\bar{M} y - \mu N y = 0 \quad \dots \quad (11)$$

mit den Randbedingungen (2), das die gleichen Voraussetzungen wie das bisher behandelte Eigenwertproblem (1) mit den gleichen Randbedingungen (2) erfüllen möge, nur daß wir an Stelle der in der Volldefinitheit enthaltenen Voraussetzung

$$\int_a^b u(x) M u(x) dx \begin{cases} > 0 \text{ für } u \in V \text{ und } u(x) \not\equiv 0 \\ = 0 \text{ für } u(x) \equiv 0 \end{cases} \quad \dots \quad (12)$$

die schwächere Voraussetzung

$$\int_a^b u(x) \bar{M} u(x) dx \geq 0 \quad \text{für jedes } u \in V$$

fordern wollen. Das Eigenwertproblem (11), (2) kann leicht auf das Problem (1), (2) zurückgeführt werden. Bezeichnen wir mit k eine positive Konstante, so können wir für (11) schreiben

$$(\bar{M} + k N) y - (\mu + k) N y = 0.$$

Setzen wir

$$M = \bar{M} + k N,$$

$$\lambda = \mu + k,$$

so haben wir ein Eigenwertproblem der Form (1) erhalten, welches wegen

$$\int_a^b u(x) M u(x) dx = \int_a^b u(x) \bar{M} u(x) dx + k \int_a^b u(x) N u(x) dx$$

auch die Voraussetzung (12) erfüllt und damit volldefinit ist.

Bezeichnen wir mit $u(x)$ eine Vergleichsfunktion der Aufgabe (11), (2), so ist sie auch Vergleichsfunktion für das Problem (1), (2). Die beiden Eigenwertprobleme besitzen die gleichen Eigenfunktionen, und auch die *Fourier*-Koeffizienten für $u(x)$ bezüglich des Systems der Eigenfunktionen sind gleich. $u(x)$ läßt sich als Vergleichsfunktion für das Problem (1), (2) in eine *Fourier*-Reihe nach den Eigenfunktionen entwickeln. Dann muß aber der Entwicklungssatz auch für die Vergleichsfunktionen des Problems (11), (2) Gültigkeit besitzen.

6. Beispiele und Schlußbetrachtungen

Es soll zunächst für ein allgemeines lineares Eigenwertproblem gezeigt werden, daß die Voraussetzungen des Entwicklungssatzes erfüllt sind. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y^{IV} = \lambda [-(x^2 y)' + 2 y]$$

mit den wesentlichen Randbedingungen

$$y(1) = y'(0) = y'(1) = 0$$

und der restlichen Randbedingung

$$y'''(0) = 0^4).$$

Wir übergehen den Nachweis der Selbstadjungiertheit und Volldefinitheit des Problems. Zur Angabe des Skalarproduktes im Raum Z der zulässigen Funktionen formen wir das Integral $[u, v]$ durch partielle Integration um, wobei mit $u(x)$ und $v(x)$ zwei Vergleichsfunktionen bezeichnet werden

$$[u, v] = \int_0^1 u [-(x^2 v)' + 2 v] dx = \int_0^1 [u'(x^2 v) + 2 u v] dx, \quad u, v \in V.$$

⁴⁾ Kippen eines Stabes infolge Torsion. Siehe R. Sonntag, Z. Angew. Math. Mech. 9 (1929), S. 378.

Damit können wir in Z das Skalarprodukt $\{u, v\}$ durch die Gleichung

$$\{u, v\} = \int_0^1 x^2 u' v' dx + 2 \int_0^1 u v dx, \quad u, v \in Z$$

definieren. Die Gültigkeit der Voraussetzung (7) ist aus dieser Gleichung sofort zu erkennen.

Wir wollen jetzt ein Beispiel für ein selbstadjungiertes und volldefinites Eigenwertproblem angeben, bei dem die Voraussetzung (7) nicht erfüllt ist. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y^{IV} + \lambda y'' = 0$$

mit den wesentlichen Randbedingungen

$$y(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(1)$$

und den restlichen Randbedingungen

$$y''(0) - y''(1) = y'(0), \quad y'''(1) - y'''(0) = y(0).$$

Die Selbstadjungiertheit der Aufgabe erhält man sofort aus den folgenden Gleichungen, die durch partielle Integration unter Beachtung sämtlicher Randbedingungen leicht zu bestätigen sind. Dabei werden mit $u(x)$ und $v(x)$ wieder zwei Vergleichsfunktionen bezeichnet.

$$\int_0^1 u M v dx = \int_0^1 u v^{IV} dx = u(0) v(0) + u'(0) v'(0) + \int_0^1 u'' v'' dx,$$

$$\int_0^1 u N v dx = - \int_0^1 u v'' dx = \int_0^1 u' v' dx.$$

Zum Nachweis der Volldefinitheit zeigen wir nur, daß $[u, u] > 0$ für jedes $u \in V$ und $u(x) \not\equiv 0$ gilt. Es ist

$$[u, u] > 0 \quad \text{für} \quad u'(x) \not\equiv 0, \quad u \in V.$$

Das Integral $[u, u]$ verschwindet für $u(x) = \text{const}$; dann muß aber $u'''(x) \equiv 0$ sein und wegen der restlichen Randbedingungen folgt $u(0) = 0$. Das Integral verschwindet also nur, wenn $u(x) \equiv 0$ ist. Zugleich haben wir damit in Z das Skalarprodukt

$$\{u, v\} = \int_0^1 u' v' dx, \quad u, v \in Z$$

gefunden. Es gilt aber

$$\{u, u\} = 0 \quad \text{für} \quad u(x) = \text{const} \neq 0,$$

und diese Funktion genügt den wesentlichen Randbedingungen. Also ist die Voraussetzung (7) nicht erfüllt.

Es soll schließlich noch gezeigt werden, daß die betrachteten Eigenwertprobleme abgeschlossen sind, wenn die Voraussetzung (7) erfüllt ist. Wir bezeichnen mit $y(x)$ eine zulässige Funktion, welche der Gleichung

$$[y, v] = 0 \quad \dots \dots \dots (13)$$

für jedes $v \in V$ genügt. Dann können wir bei Beachtung der Reihenfolge von y und v nach den Überlegungen in Nr. 2

$$[y, v] = \{y, v\}, \quad y \in Z, \quad v \in V$$

schreiben. Wegen (13) folgt somit

$$\{y, y\} = \{y, y\} - \{y, v\}^2.$$

Daraus ergibt sich mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung

$$\{y, y\} \geq \{y, y\} - \{y, y\} \{v, v\}.$$

Wählen wir für v eine Vergleichsfunktion, für welche

$$1 - \{v, v\} = p > 1$$

gilt, so folgt aus

$$\{y, y\} \geq p \{y, y\},$$

daß $\{y, y\} = 0$ und wegen (7) damit $y(x) \equiv 0$ gelten muß. Aus dem Bestehen der Gleichung (13) für jedes $v \in V$ folgt also, daß $y(x)$ identisch verschwinden muß. Das Problem ist somit abgeschlossen.

Zur Konstruktion und Durchführung von Iterationsverfahren bestimmter Ordnung

Von H. Ehrmann

Das Problem der Aufstellung von Iterationsverfahren der Gestalt

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad \text{mit} \quad \varphi(x) = G(x, F(x), F'(x), \dots, F^{(s)}(x)), \quad s \geq 1 \quad \dots \quad (1),$$

die mit einer vorgegebenen ganzzahligen Ordnung gegen eine Lösung einer Gleichung $F(x) = 0$ konvergieren, wurde von E. Schröder¹⁾ unter gewissen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen geschlossen und vollständig gelöst. Wenn hier trotzdem eine neue Methode zur Konstruktion solcher Verfahren gegeben wird, so geschieht dies, 1. weil die meisten bekannten Verfahren für die praktische Durchführung zu umständlich sind und 2. weil trotz einiger Auszählungen²⁾ noch keine einfachen Kriterien für die Wahl der günstigsten Ordnung vorliegen.

Es gilt folgender Satz:

Die Funktion $F(x)$ besitze in einer Nullstelle ξ Ableitungen bis zur k -ten Ordnung und es gelte $F'(\xi) \neq 0$.

Dann ergibt folgende Vorschrift ein Iterationsverfahren, das für alle Anfangswerte x_0 in einer Umgebung von ξ von mindestens k -ter Ordnung konvergiert:

Man berechne

1. die Funktionswerte

$$\frac{1}{r!} \frac{d^r F(x_n)}{dx^r} = \frac{F_n^{(r)}}{r!} \quad \text{für } r = 0, 1, \dots, k-1,$$

2. die Verbesserungen

$$v_2 = \frac{-F_n}{F_n'}, v_3 = \frac{-1}{F_n'} \left\{ F_n + v_{2-1}^2 \frac{F_n''}{2!} + v_{2-1}^3 \frac{F_n'''}{3!} + \dots + v_{2-1}^{s-1} \frac{F_n^{(s-1)}}{(s-1)!} \right\} \quad \text{für } s = 3, \dots, k.$$

So wird der neue Näherungswert: $x_{n+1} = x_n + v_k$.

Der Vorteil dieser Verfahren k -ter Ordnung besteht darin, daß sie die praktische Durchführbarkeit sehr erleichtern. Man braucht dabei die Verfahren nicht explizit anzugeben, sondern kann die einzelnen Schritte in der Rechnung selbst vollziehen. Dabei ist wesentlich, daß die Verbesserungen v_i ganze rationale Funktionen der v_{i-1} sind, wobei sich die Konstanten nicht ändern. Nur der Grad steigt jeweils um 1. Daher wird man hier zweckmäßig das Horner'sche Schema anwenden (vgl. nebenstehendes Schema).

Das Schema ist besonders günstig für algebraische Gleichungen bei Verwendung des gewöhnlichen Horner'schemas, weil dabei die Funktionswerte gerade an den richtigen Stellen erscheinen. Dabei ist nur zu beachten, daß an der Stelle von F_n' eine 0 steht.

Die einheitliche Durchführung gestattet 1. eine geschlossene einfache Programmierung³⁾ für jede Ordnung k , 2. eine geschlossene unmittelbare Abschätzung der Rechenarbeit. Unter Berücksichtigung, daß die n -malige Anwendung eines Verfahrens r -ter Ordnung einem Verfahren mit der Ordnung $k = r^n$ entspricht, ergeben sich einfache Kriterien für die Wahl der Ordnung wie etwa die folgenden:

1. Beträgt die Rechenarbeit zur Berechnung der Funktionswerte $\frac{F^{(r)}}{r!}$ je der von a_r Multiplikationen (bzw. Divisionen), so ist das Verfahren der Ordnung k das günstigste, für die der Quotient

$$Q = \frac{k(k+1) + 2(a_0 + a_1 + \dots + a_{k-1}) - 4}{\log k}$$

seinen kleinsten Wert annimmt.

2. Zur Lösung algebraischer Gleichungen bis zum 5. Grade ist das Newton'sche und ab 6. Grade das Verfahren 3. Ordnung in bezug auf die Rechenarbeit am günstigsten⁴⁾.

Diese Verfahren gestatten außerdem einen einfachen Konvergenzbeweis mit Fehlerabschätzung für jede Ordnung. Ferner sind sie für Verallgemeinerungen auf andere Gleichungstypen gut geeignet, wie an anderer Stelle gezeigt werden soll.

Anschrift: Doz. Dr. H. Ehrmann, Mathematisches Institut A der Technischen Hochschule Stuttgart

¹⁾ E. Schröder, Math. Ann. 2, (1870), 317—365.

²⁾ Siehe z.B. R. Ludwig, Z. angew. Math. Mech. 29 (1949), S. 44—51.

³⁾ Diese wurde in Stuttgart bei der Z 22 durchgeführt.

⁴⁾ Zahlreiche Vergleiche lassen vermuten, daß diese speziellen Verfahren in bezug auf die Rechenarbeit unter allen möglichen Verfahren (1) von k -ter Ordnung an der unteren Grenze liegen. Dies zu beweisen, ist mir jedoch nicht gelungen.

Berechnung des Selbstpotentials von Gitterpunktanordnungen mittels Differenzengleichungen

Von O. Emersleben

1. Für das Selbstpotential $\Phi_{\mathfrak{G}}(n)$ einer Gittergeraden mit n äquidistanten Gitterpunkten — das man kennt [1], vgl. auch [2] — kann man auch eine Differenzengleichung aufstellen; denn das Selbstpotential der Geraden mit $n + 1$ Punkten ist gleich dem Selbstpotential der Geraden mit n Gitterpunkten vermehrt um das Potential der Gittergeraden mit n Gitterpunkten in dem $(n + 1)$ ten Punkt als Aufpunkt.

Auch dies führt zu dem bekannten Ausdruck für $\Phi_{\mathfrak{G}}(n)$.

2. Entsprechend kann man auch eine Differenzengleichung für das Selbstpotential eines dreieckigen Bereiches eines dreieckigen Gitters aufstellen. Speziell für den Fall des gleichseitigen Gitters — wenn also ein reguläres dreieckiges Netz vorhanden ist — und von diesem ein Bereich von der Gestalt eines gleichseitigen Dreiecks betrachtet wird, ist diese Differenzengleichung bereits in dem Vortragsauszug [3] mitgeteilt.¹⁾ Jedoch zeigt sich, daß man den Beweis auch — sogar übersichtlicher — führen kann, wenn man nicht von einem regulären Netz ausgeht sondern einem solchen ebenen Netz, das aus beliebigen einander kongruenten Dreiecken mit den Seiten a, b, c als Gitterkonstanten aufgebaut ist und in Richtung der Dreiecksseiten je $n + 1$ Gitterpunkte aufweist, wie es hier für $n = 8$ in Zeile 0 der Tafel dargestellt ist. Die Tafel zeigt den Gang des Beweises.

Das Selbstpotential $\Phi_{\mathfrak{D}}(n + 1)$ des Dreiecks \mathfrak{D} mit $n + 1$ Gitterpunkten pro Kante ist, wie man aus der Darstellung in Zeile 0 ersieht, gleich dem Selbstpotential $\Phi_{\mathfrak{D}}(n)$ desselben Dreiecks ohne die rechte Kante \mathfrak{G} — d. h. des Dreiecks \mathfrak{D}' mit n Gitterpunkten pro Kante — für sich plus dem Selbstpotential $\Phi_{\mathfrak{G}}(n + 1)$ dieser Geraden \mathfrak{G} für sich allein vermehrt um das gegenseitige Potential $\Psi_{\mathfrak{D}\mathfrak{G}}$ des Dreiecks \mathfrak{D}' auf die Gerade \mathfrak{G} . Die (1.) Differenz des genannten Selbstpotentials, $\Delta\Phi_{\mathfrak{D}}(n + 1)$, ist daher gleich der Summe aus dem Selbstpotential $\Phi_{\mathfrak{G}}(n + 1)$ der Geraden und dem gegenseitigen Potential $\Psi_{\mathfrak{D}\mathfrak{G}}$, wie die Gleichung unter Zeile 0 der Tafel angibt.

Wie die römischen Zahlen in Klammern andeuten, wird $\Psi_{\mathfrak{D}\mathfrak{G}}$ in Zeile I, $\Phi_{\mathfrak{G}}(n + 1)$, das von geringerer Größenordnung ist, in Zeile IV weiter untersucht.

In Zeile I wird das Potential $\Psi_{\mathfrak{D}\mathfrak{G}}$ zerlegt in dasjenige einer Anordnung, bei der die linke Kante nicht belegt ist, also eines kleineren Dreiecks \mathfrak{D}'' auf eine kürzere Gerade \mathfrak{G}' einerseits, sowie das Potential $\Psi_{\mathfrak{D}''\mathfrak{G}}$ dieses kleineren Dreiecks in dem oberen Eckpunkt des Dreiecks und das Potential $\Phi_{\mathfrak{G}\mathfrak{G}'}$, der rechten Kante \mathfrak{G} des Dreiecks auf die linke Kante (ohne die obere Ecke) \mathfrak{G}' .

Von den beiden Potentialen $\Psi_{\mathfrak{D}''\mathfrak{G}}$ und $\Psi_{\mathfrak{G}\mathfrak{G}'}$, die so gemäß Zeile I die erste Differenz von $\Psi_{\mathfrak{D}\mathfrak{G}}$ bilden, werden wiederum — wie die römischen Ziffern in Klammern angeben — in Zeile II und III die weiteren Differenzen gebildet, indem nunmehr die unteren Kanten des Dreiecks unbelegt gelassen werden.

Zeile V zeigt, daß die zweite Differenz des Selbstpotentials $\Phi_{\mathfrak{G}}(n + 1)$ einer äquidistanten Gittergeraden gemäß Zeile IV gleich ist dem Potential beider endständigen Gitterpunkte aufeinander.

Insgesamt ergibt sich — letzte Zeile — daß die dritte Differenz des Selbstpotentials $\Phi_{\mathfrak{D}}(n + 1)$ eines solchen Dreiecks gleich ist der Summe von 3 gegenseitigen Potentialen, nämlich der Potentiale der Gittergeraden einer Dreiecksseite in der gegenüberliegenden Ecke des Dreiecks. Dabei sind bei den Geraden die beiden endständigen Gitterpunkte je nur mit dem Gewicht $\frac{1}{2}$ berücksichtigt — oder von jeder Geraden ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit jeweils der Gitterpunkt am rechten Ende wegzulassen.

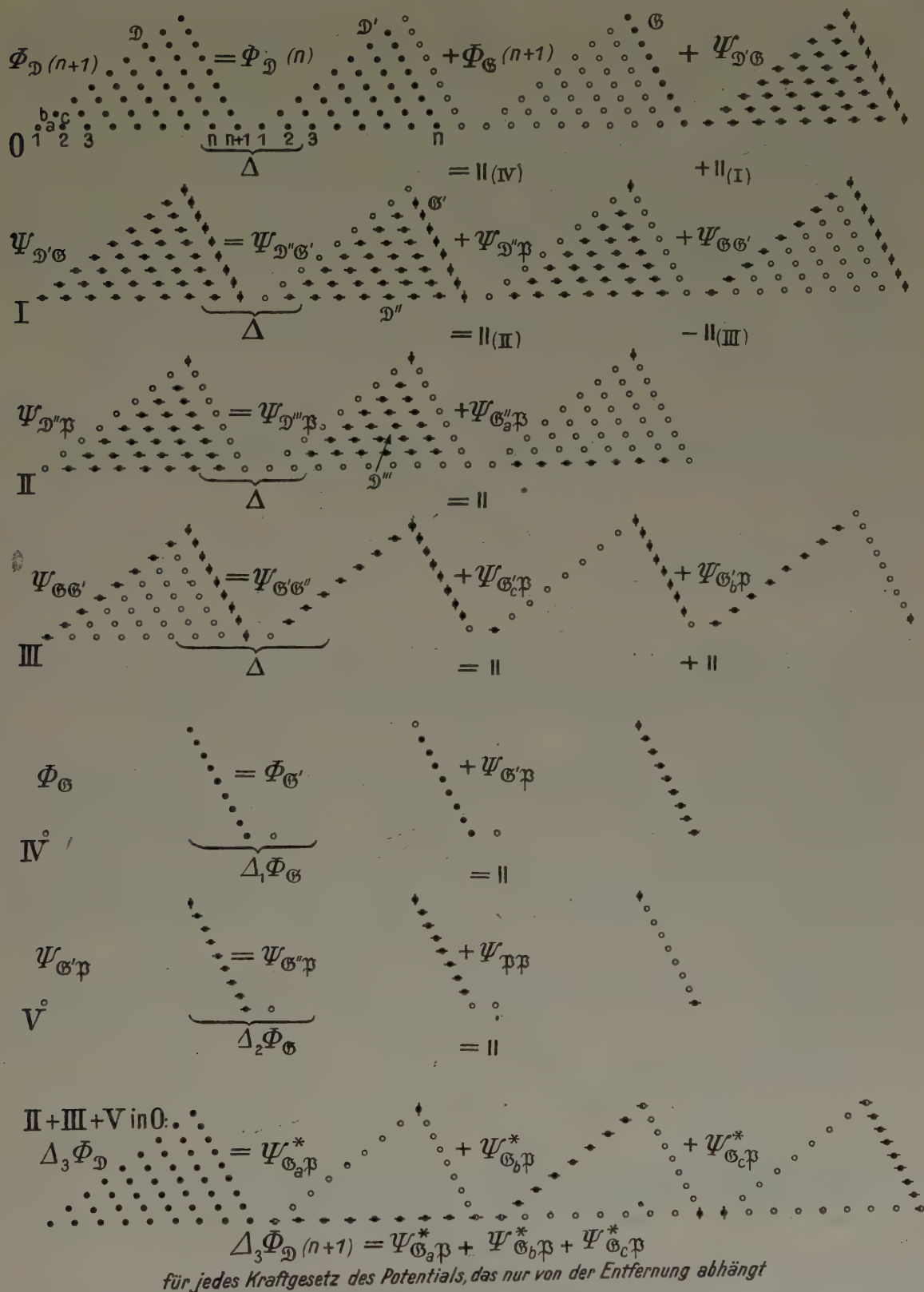
3. Entsprechend wurde auch das Selbstpotential eines Tetraeders berechnet. Auch hier kann man den Beweis übersichtlich gestalten, wenn man von einer allgemeinen dreieckigen Pyramide ausgeht. Dann ist mindestens asymptotisch für $n \rightarrow \infty$

$$\Delta_4 \Phi_{\mathfrak{T}}(n + 1) \sim \sum \Psi_{\mathfrak{D}\mathfrak{G}} + \sum \Psi_{\mathfrak{G}\mathfrak{G}},$$

d. h. gleich dem Potential $\Psi_{\mathfrak{D}\mathfrak{G}}$ der einzelnen Dreiecke, die die Pyramide begrenzen, in den gegenüberliegenden Pyramidenecken, summiert über alle 4 Dreieck-Gegeneckpunkt-Kombinationen vermehrt um das Potential $\Psi_{\mathfrak{G}\mathfrak{G}}$ einer Kante der Pyramide auf die dazu windschiefe, summiert über die 3 derartigen Geradenpaare²⁾.

¹⁾ Summierung dieser Differenzengleichung ist in [4] durchgeführt.

²⁾ Weitere auch asymptotische und numerische Ergebnisse betr. das Selbstpotential des (regulären) Tetraeders vgl. [4], §§ 10 und 3, [5] Tabelle 3 nebst zugehörigem Text sowie kurz [6].



Zeichenerklärung der Tafel

Selbstpotentiale werden mit Φ bezeichnet, die Punkte, deren Belegungen (Ladungen) untereinander das Selbstpotential bilden, sind mit ausgefüllten schwarzen Kreisen gezeichnet (\bullet), die gegenseitigen Potentiale zweier Arten von Belegungen von Punktanordnungen mit Ψ . Die Punkte einer Art dieser Belegungen sind zur Unterscheidung durch horizontale Striche (\bullet), die der anderen Art durch vertikale Striche (\blacklozenge) durch die Vollkreise gekennzeichnet. Die Leerkreise (\circ) bezeichnen unbelagte Plätze der dreieckigen Gitterpunktanordnung \mathcal{D} . Ladungen vom Gewicht $\frac{1}{2}$ sind durch halb ausgefüllte Kreise (\odot) dargestellt.

Literatur

- [1] O. Emersleben, Das Selbstpotential der endlichen äquidistanten Punktreihe. Math. Nachr. **3** (1950), S. 373—386.
- [2] O. Emersleben, Über die Berechnung der Gitterenergie endlicher Kristallstücke. Z. angew. Math. Mech. **30** (1950), S. 252—254.
- [3] O. Emersleben, Berechnung des Selbstpotentials von Gitterpunktanordnungen mittels Differenzengleichungen. Ges. angew. Math. Mech. (GAMM), Programm für die wiss. Jahrestagung 1959 in Hannover, S. 19—20.
- [4] O. Emersleben, Das Selbstpotential der Gitterpunkte in einem gleichseitigen Dreieck. Math. Nachr. (im Druck).
- [5] O. Emersleben, Die elektrostatische Energie einer Raumlading. Hochfrequenztechn. u. Elektroakust. Leipzig (im Druck, **68** Nr. 4 (1959)).
- [6] O. Emersleben, Näherungsformeln für die elektrostatische Energie einer Raumlading. Naturwiss. **46** (1959), S. 64—65 u. (Ber.) 276.

Anschrift: Prof. Dr. O. Emersleben, Greifswald, Arndtstr. 10, u. Berlin-Zehlendorf, Treibjagdweg 16

Verteilung reeller Wurzeln von algebraischen Gleichungen mit Zufallskoeffizienten

Von K. W. Gaede

Gegeben ist die Gleichung

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

mit reellen Koeffizienten, von denen k ($0 \leq k \leq n$) wohlbestimmte Zahlen sind. Die übrigen $(n+1-k)$ Koeffizienten seien mit Ungenauigkeiten behaftet, die dadurch definiert sind, daß die nicht wohlbestimmten Koeffizienten Zufallsgrößen mit der gemeinsamen $(n+1-k)$ -dimensionalen Verteilungsdichte $g(\vec{a})$ sind. (\vec{a} sei der Vektor der Zufallskoeffizienten.)

Dadurch sind auch die Wurzeln von (1) Zufallsgrößen. Über ihre Verteilung liegen für $a_0=1$, $k=n$, n beliebig, $g = \text{const.}$ Ergebnisse von Finzel [1], für $a_0=1$, $k=n=2$, g beliebig von Hamblen [2], für $a_0=1$, $k=n$, n beliebig, g beliebig vom Verfasser [3]. Für $k \neq n$ würden bei der Untersuchung der Wurzelverteilung nach der dort verwendeten Methode Schwierigkeiten auftreten.

Es sei hier vorausgesetzt, daß das Gebiet \vec{A} , in dem $g(\vec{a}) > 0$ ist, konvex ist. Ist von einem Intervall I der reellen x -Achse bekannt, daß nur eine Zufallswurzel von (1) in I auftreten kann, so gibt die Verteilungsfunktion F dieser Wurzel das Lösungsverhalten von (1) in I vollständig wieder.

Nun stellt $f(\xi) = 0$, $\xi = \text{const}$ (reell) im Raum K der Zufallskoeffizienten eine Hyperebene dar, ebenso $f'(\xi) = 0$. Teilt $f(\xi) = 0$ \vec{A} in zwei nichtleere Mengen, so sei $\vec{A}'(\xi)$ diejenige von ihnen, die mit ξ wächst.

Damit gilt:

Gibt es zwei Zahlen c_1 und c_2 , so daß

$$F^*(\xi) = \int_{\vec{A}'(\xi)} g(\vec{a}) d\vec{a} \quad \text{für } \xi \in I_1 \quad \text{mit } I_1 \{c_1 \leq \xi \leq c_2\}$$

von 0 bis 1 monoton wächst und ist $[f(\xi) = 0] \cap [f'(\xi) = 0] \cap \vec{A}$ leer für $\xi \in I_1$, so ist $F(\xi) = F^*(\xi)$ die Verteilungsfunktion der einzigen in I_1 auftretenden reellen Zufallswurzel von (1).

Eine Gleichung 5-ten Grades und eine kubische Gleichung werden als Beispiele betrachtet.

Literatur

- [1] L. Finzel, Untersuchungen über die wahrscheinliche Lage der Wurzeln reeller algebraischer Gleichungen. Mathem. Nachrichten **11** (1954), S. 85—104.
- [2] W. Hamblen, Distribution of Roots of Quadratic Equations with Random Coefficients. Ann. Math. Statist. **27** (1956), S. 1136—1143.
- [3] K. W. Gaede, Zur Verteilung der Wurzeln zufälliger algebraischer Gleichungen. Diss. TH. München 1959.

Anschrift: Dr. K. W. Gaede, München 13, Schleißheimer Str. 198

Über die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete

Von Dieter Gaier

Verschiedene Probleme aus der Potential- und Bipotentialtheorie erfordern die Durchführung der konformen Abbildung eines zweifach zusammenhängenden Gebiets auf einen konzentrischen Kreisring. Das hierfür von Komatu (1945) angegebene funktionentheoretische Iterationsverfahren wurde vom Verf. in einer früheren Arbeit [1] bereits auf die Güte der Konvergenz hin untersucht; die dort gewonnenen Abschätzungen werden jetzt unter Benützung *Koebscher* Ideen verbessert, wobei die neuen Fehlerschranken der Größenordnung nach bestmöglich werden. Die Einschaltung einer Spiegelung zwischen je zwei konforme Abbildungen beschleunigt die Konvergenz des Verfahrens erheblich. Wegen einer genaueren Darstellung der beiden Verfahren verweisen wir auf Kapitel III, § 9, Teil B und C einer kürzlich erschienenen Arbeit des Verf. [2].

Das Verfahren von Komatu wurde auf folgendes Beispiel angewandt. Das Gebiet G_ζ der ζ -Ebene sei von $|\zeta| = 1$ berandet sowie von dem Schlitz $-L \leq \zeta \leq +L$ ($L = \sqrt{\sin 46^\circ} = 0,84815$); sein Modul errechnet sich [3] zu $M = 2,1662$. Dieses Gebiet wird durch die Abbildung $\zeta = \frac{L}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ in ein Gebiet G_z übergeführt, das außen von $|z| = 1$ und innen von einer ellipsenförmigen Kurve C berandet ist; auf dieses G_z wird nun das Verfahren von Komatu angewandt.

Dabei zeigt es sich, daß der relative Fehler der gewonnenen Ränderzuordnung zur exakten Ränderzuordnung auf dem Kreisring schon nach 2—3 *Komatu*-Iterationen unter 2‰ liegt. Verwendet man die gewonnenen Ränderzuordnungsfunktionen zur Bestimmung des Moduls M von G_z , so ergibt sich nach k Iterationen

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	Exakter Modul
M	2,17167	2,16761	2,16744	2,16743	2,1662

das heißt, daß schon nach zwei *Komatu*-Schritten der Relativ-Fehler $< \frac{2}{3} \text{‰}$ ist. Das Verfahren eignet sich daher auch zur Bestimmung des Moduls sehr gut.

Das Iterationsverfahren wurde auf dem Stuttgarter Elektronenrechner Z 22 durchgeführt. Das Programm umfaßt (einschließlich aller Unterprogramme) etwa 1000 Befehle. Ein Iterationsschritt dauerte 42 Minuten. Die bei jedem Halbschritt erforderliche konforme Abbildung eines einfach zusammenhängenden Gebiets auf einen Kreis wurde nach dem Verfahren von Theodoresen ausgeführt, wovon 5 Iterationsschritte in jeweils 110 Sekunden voll ausreichend waren.

Literatur

- [1] D. Gaier, Journal Rat. Mech. and Analysis 6 (1957), S. 865—883.
- [2] D. Gaier, Archive Rat. Mech. and Analysis 3 (1959), S. 149—178.
- [3] Z. Nehari, Conformal Mapping, New York 1952, S. 293—295.

Anschrift: Dozent Dr. D. Gaier, Stuttgart, Hölderlinstr. 34

Konforme Abbildung mittels elektronischer Analogierechenanlagen

Von J. Heinhold

Für die instrumentelle Durchführung konformer Abbildungen sind in den dreißiger und vierziger Jahren eine Reihe von Methoden entwickelt worden. Neuerdings ermöglichen auch die modernen elektronischen Analogrechner u. a., wie im Vortrag gezeigt wurde, die Erzeugung konformer Abbildungen sehr allgemeiner Art.

1. Im einfachsten Falle sind die Abbildungen $w = f(z)$ einer $z = x + iy$ -Ebene auf eine $w = u + iv$ -Ebene, wobei die Funktionen

$$u(x; y) = u(t); \quad v(x; y) = v(t)$$

durch die in der z -Ebene vorgegebenen auf dem Analogrechner als Funktion der Zeit erzeugten Funktion $x = x(t)$, $y = y(t)$ mittels der arithmetischen Grundoperationen gewonnen werden.

Ein typisches Beispiel hierfür ist die *Joukowskiabbildung* $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$.

2. Im nächst allgemeineren Fall werden u und v durch die Grundoperationen aus Funktionen $f(x)$ und $g(y)$ erhalten, die selbst als Lösung von Differentialgleichungen auf dem Analogrechner gewonnen werden. Dabei ist es zweckmäßig, die abzubildende Kurve in der z -Ebene durch ihre Ableitungen $\dot{x}(t)$ und $\dot{y}(t)$ vorzugeben, z. B. $w = \sin z$, also $u = \sin x(t) \odot y(t)$, $v = \cos x(t) \odot y(t)$.

3. Im allgemeinsten Falle lassen sich die Abbildungen von Kurven $z(t)$ durch analytische Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen n -ter Ordnung

$$\frac{d^n w}{dz^n} = F \left(z, w, \frac{dw}{dz} \dots \frac{d^{n-1} w}{dz^{n-1}} \right)$$

mit den Anfangswerten $w^{(\nu)}(z_0) = W_\nu$ ($\nu = 0, 1, \dots, n-1$), $z_0 = z(0)$ auf dem Analogrechner erhalten. Setzt man $w^{(\nu)}(z(t)) = u_\nu(t) + i v_\nu(t)$, so erhält man für $z = z(t)$, $\frac{d}{dz} = \frac{1}{\dot{z}} \frac{d}{dt}$ und damit das System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \dot{u}_\nu(t) &= u_{\nu+1}(t) \dot{x}(t) - v_{\nu+1}(t) \dot{y}(t) \\ \dot{v}_\nu(t) &= v_{\nu+1}(t) \dot{x}(t) + u_{\nu+1}(t) \dot{y}(t) \end{aligned} \right\} \nu = 0, 1, \dots, n-1 \\ \dot{u}_{n-1}(t) &= F_1(x(t), y(t), u_0(t), v_0(t), \dots, u_{n-1}(t), v_{n-1}(t)) \dot{x}(t) \\ &\quad - F_2(\dots) \dot{y}(t) \\ \dot{v}_{n-1}(t) &= F_2(\dots) \dot{x}(t) \\ &\quad + F_1(\dots) \dot{y}(t) \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen $u_\nu(0) = \operatorname{Re} w_\nu$; $v_\nu(0) = \operatorname{Im} w_\nu$.

Als Beispiel wurde die Abbildung des Kreises $z = \text{konst}$ durch die Lösung der *Besselschen* Differentialgleichung angeführt und eine Reihe derartiger Abbildungen, die mit dem Telefunkenanalogrechner gewonnen werden, gezeigt.

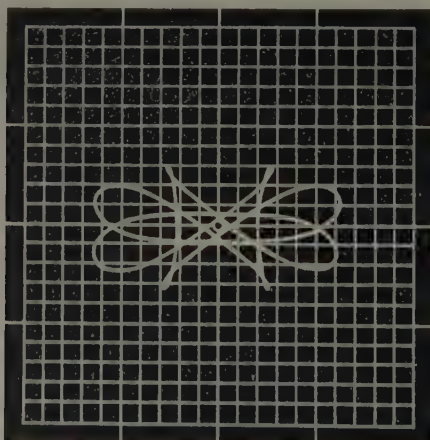


Bild 1

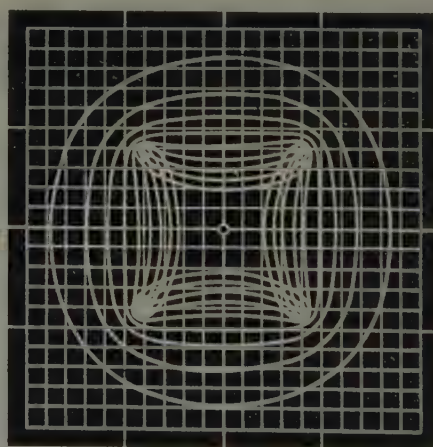


Bild 2

Bild 1 gibt z. B. die Abbildung von $|z| = 0,9$ durch die Lösung der *Besselschen* Differentialgleichung mit den Anfangsbedingungen $w(0) = 0,527$; $\dot{w}(0) = -i 0,857$, Bild 2 die Abbildung der Kurve $|z| = R$ für R Werte 0,2 bis 1,0 in Schritten von 0,1 durch $J_{-1/2}(z)$.

Unter die allgemeine Klasse von Abbildungen fallen insbesondere Polygonabbildungen von Geraden und Kreispolygonen.

Anschrift: Prof. Dr. J. Heinhold, München-Solln, Irmgardstr. 15, II

Lösung einiger Probleme aus der Theorie der diskreten Irrfahrt

Von E. Henze

Es sollen diskrete Irrfahrten im ebenen quadratischen Gitter endlicher Maschenweite betrachtet werden. Ein Punkt, eine Partikel o. ä. irrt also nach Zufallsgesetzen auf den Linien des ebenen Gitters, als dessen Ecken wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten annehmen können, umher. Pro Zeiteinheit wird der Weg von Gitterpunkt zu Gitterpunkt zurückgelegt, wobei für jeden Gitterpunkt 4 Wahrscheinlichkeiten für die Fortsetzung der Wanderung wie in Bild 1 angedeutet, gegeben sind. Es ist

$$p_1 + q_1 + p_2 + q_2 = 1 \quad (1)$$

und damit ein Verweilen im Gitterpunkt ausgeschlossen. Diese Wahrscheinlichkeiten sollen für alle Gitterpunkte gleich und zeitunabhängig sein, es handelt sich dann um eine räumlich homogene, stationäre Irrfahrt, deren wahrscheinlichkeitstheoretisches Verhalten durch eine Markoffsche Kette beschrieben wird. Die vier vorgegebenen Wahrscheinlichkeiten können nun gleich sein, d. h. je $1/4$, dann spricht man von einer symmetrischen Irrfahrt, im anderen Falle von einer unsymmetrischen Irrfahrt.

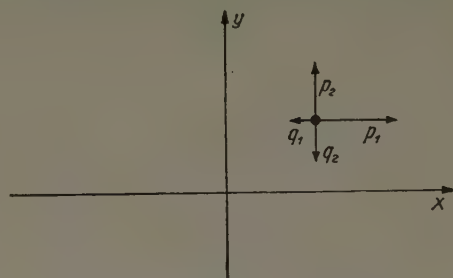


Bild 1

In dieser Menge von Gitterpunkten kann nun eine absorbierende Untermenge R vorgegeben sein, die so beschaffen ist, daß das Teilchen, wenn es einen Punkt dieser Untermenge erreicht hat, ihn überhaupt nicht mehr, oder nur noch nach Punkten der gleichen Untermenge hin verlassen kann. Im ersten Falle zerfällt die absorbierende Untermenge R — der Rand wie man auch sagt — in Untermengen mit nur je einem Element, man spricht davon, daß die Punkte des Randes 1-absorbierend sind, weil das Teilchen mit der Wahrscheinlichkeit 1 dort festgehalten wird.

Die Behandlung solcher Probleme der diskreten Irrfahrt im Gitter wirft nun hauptsächlich folgende vier Einzelfragen auf:

1. Klassifikationsproblem,
2. Übergangsproblem,
3. Visitenproblem,
4. Absorptionsproblem.

Das Klassifikationsproblem behandelt die Frage nach der Wahrscheinlichkeit des Erreichens fester Punkte des Bereiches, in dem die Irrfahrt stattfindet. Man fragt z. B. danach, ob eine vom Punkte (ξ, η) startende Partikel diesen Punkt bei unbegrenzt andauernder Irrfahrt mit der Wahrscheinlichkeit 1 wieder erreicht oder nicht. Im ersten Falle nennt man die Punkte, die Zustände der beschreibenden Kette, rekurrent, im zweiten Fall transient. G. Pólya hat schon 1929 gezeigt, daß bei symmetrischer Irrfahrt in der unbegrenzten Ebene, also bei Abwesenheit absorbierender Punkte, jeder Gitterpunkt mit Wahrscheinlichkeit 1 mindestens einmal erreicht wird, daß dieses aber für höhere Dimensionszahlen nicht mehr gilt. — Die vorliegenden Ergebnisse sollen in Form der unten stehenden Tabelle 1 übersichtlich zusammengefaßt werden. — Der Fall der unsymmetrischen Irrfahrt in der Ebene ist im Hinblick auf die Klassifikation der Punkte von Chung und Fuchs 1951, von Foster und Good 1953 und von Domb 1954 untersucht worden. Chung und Fuchs haben gezeigt, daß die Divergenz der erzeugenden Funktion

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} \cdot s^n,$$

wobei $p_{ii}^{(n)}$ die beim Übergangsproblem gewonnenen Wahrscheinlichkeiten, daß das die Irrfahrt ausführende Teilchen nach n Schritten (nicht notwendig zum ersten Male) in den Ausgangspunkt zurückkehrt, sind, für

$$s \rightarrow 1 - 0$$

hinreichend für die Existenz rekurrenter Stellen (bei variierendem Punkt mit dem Index i) ist. Foster und Good haben gezeigt, daß diese Bedingung auch notwendig ist. Letztere haben,

wie auch Domb nun unsymmetrische Irrfahrten in der unbegrenzten Ebene untersucht, wobei aber durch die vorausgesetzte Bedingung für die a-priori-Wahrscheinlichkeiten

$$p_1 = q_1, \quad p_2 = q_2 \quad \dots \quad (2)$$

stets das Vorhandensein einer echten Drift ausgeschlossen war. Sie konnten zeigen, daß unter dieser Bedingung alle Punkte der unbegrenzten Ebene rekurrent sind.

Beim Übergangsproblem stellt man die Frage nach der Wahrscheinlichkeit $p^{(n)}(x, y; \xi, \eta)$ daß (bei evtl. vorgegebener absorbierender Berandung R) eine vom Punkte (ξ, η) startende Irrfahrt nach genau n Schritten — nicht notwendig zum ersten Male — den Punkt (x, y) erreicht. Für die symmetrische Irrfahrt in der unbegrenzten Ebene hat Pólya diese Übergangswahrscheinlichkeit hingeschrieben, in etwas anderer Form auch W. Feller in seinem bekannten Buch. Die Übergangswahrscheinlichkeit genügt der partiellen Differenzengleichung

$$p^{(n+1)}(x, y; \xi, \eta) - \{p_1 p^{(n)}(x-1, y; \xi, \eta) + q_1 p^{(n)}(x+1, y; \xi, \eta) + p_2 p^{(n)}(x, y-1; \xi, \eta) + q_2 p^{(n)}(x, y+1; \xi, \eta)\} = 0 \quad \dots \quad (3)$$

mit den Anfangswerten

$$p^{(0)}(\xi, \eta; \xi, \eta) = 1; \quad p^{(1)}(\xi+1, \eta; \xi, \eta) = p_1; \quad p^{(1)}(\xi-1, \eta; \xi, \eta) = q_1 \quad \dots \quad (4)$$

$$p^{(1)}(\xi, \eta+1; \xi, \eta) = p_2; \quad p^{(1)}(\xi, \eta-1; \xi, \eta) = q_2$$

und beim Vorhandensein absorbierender Punkte entsprechenden Randbedingungen.

Das Visitenproblem stellt die Frage nach der mittleren Anzahl von Besuchen, die ein eine solche Irrfahrt ausführendes Teilchen in einem Punkt (x, y) macht. Das Problem hat offensichtlich nur Sinn für transiente Punkte. Wie schon Courant, Friedrichs und Lewy 1929 gezeigt haben, ist die Lösung des Visitenproblems „Greensche Funktion“ der Differenzengleichung des Übergangs- und Absorptionsproblems, allerdings in zeitunabhängiger Form. Für den Fall der symmetrischen Irrfahrt in der Halbebene haben McCrea und Whipple diese Lösung, ausgehend von der Behandlung endlicher Gebiete, durch Grenzübergänge gewonnen.

Beim Absorptionsproblem werden in erster Linie die vier Wahrscheinlichkeiten, daß eine von einem transienten Punkt (ξ, η) startende Irrfahrt nach n Schritten — oder nach beliebiger Zeit — einen bestimmten Punkt des Randes — oder den Rand überhaupt — erreicht, gesucht. McCrea und Whipple haben die Wahrscheinlichkeit a_{ir} bestimmt, daß eine von $(i) \equiv (\xi, \eta)$ startende symmetrische Irrfahrt in der Halbebene irgendwann einen bestimmten Punkt (r) der absorbierenden, berandenden Achse erreicht. Diese Wahrscheinlichkeiten erfüllen alle zu (3) und (4) ähnliche Differenzengleichungen und Anfangs- bzw. Randwerte.

Es sollen jetzt die neu gewonnenen Resultate diskutiert werden — sie seien ebenfalls in die Tabelle 1 eingetragen. — Es wurde im einzelnen behandelt

1. die symmetrische und unsymmetrische Irrfahrt in der unbegrenzten Ebene,
2. die symmetrische und unsymmetrische Irrfahrt in der oberen Halbebene,
3. die symmetrische Irrfahrt in der geschlitzten Ebene, das ist die längs der negativen Abszissenachse mit lauter 1-absorbierenden Punkten besetzten Ebene.

Die Punkte des Randes sind auch im Falle 2 stets als 1-absorbierend vorausgesetzt worden, d. h. daß keine Wanderung auf dem Rand selbst möglich ist.

Der Kürze wegen sollen nur die erzielten Ergebnisse angegeben werden:

A) Beim Klassifikationsproblem gelang es, zu zeigen, daß bei der unsymmetrischen Irrfahrt in der unbegrenzten Ebene beim Vorhandensein einer echten Drift alle Punkte transient sind, d. h. daß $p_1 = q_1, p_2 = q_2$ nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig für den rekurrenten Charakter der Punkte der Ebene ist. Ferner konnte gezeigt werden, daß im Falle des Vorhandenseins von Randpunkten (Fälle 2. u. 3.) alle Punkte der offenen Ebene transient sind.

B) Beim Übergangsproblem gelang es, die Übergangswahrscheinlichkeiten für die symmetrische Irrfahrt in der Halbebene und asymptotisch für verschwindende Schrittweite der Irrfahrt in der geschlitzten Ebene sowie die Übergangswahrscheinlichkeiten für die unsymmetrische Irrfahrt in der unbegrenzten Ebene und der Halbebene aufzustellen. — Die für verschwindende Maschenweite des Gitters und verschwindenden Zeitmaßstab gültigen asymptotischen Ausdrücke sind sowohl für das Übergangsproblem wie auch für das Visitenproblem und Absorptionsproblem stets abgeleitet worden.

C) Die Lösungen des Visitenproblems wurden für die symmetrische Irrfahrt in der geschlitzten Ebene — hier wieder asymptotisch wie unter B) — und für die unsymmetrische Irrfahrt in der Halbebene gefunden.

D) Beim Absorptionsproblem sind bis auf die von McCrea und Whipple abgeleitete Wahrscheinlichkeit a_{ir} , daß eine symmetrische Irrfahrt in der Halbebene irgendwann einen speziellen Punkt (r) des Randes erreicht, alle Ergebnisse neu.

Tabelle 1

	Symmetrische Irrfahrt			Unsymmetrische Irrfahrt	
	Unbegrenzte Ebene	Halbebene	geschlitzte Ebene	Unbegrenzte Ebene	Halbebene
Klassifikationsproblem	Pólya 1921			Chung u. Fuchs 1951 Foster u. Good 1953 Domb 1954 $p_1 = q_1; p_2 = q_2$	Kriterien
Übergangsproblem	Pólya 1921 Feller 1950 Asymptotik: 1929 Courant + Friedrichs + Lewy				
Visitenproblem	Hauptlösung: McCrea + Whipple 1939/40	McCrea + Whipple 1939/40			
Absorptionsproblem		a_{ir} McCrea + Whipple 1939/40			
Klassifikationsproblem		Randpunkte rekurrent, Punkte des offenen Gebiets transient	Randpunkte rekurrent, Punkte des offenen Gebiets transient	$p_1 = q_1; p_2 = q_2$ notwendig (und hinreichend) für rekurrentes Verhalten	Randpunkte rekurrent, Punkte des offenen Gebietes transient
Übergangsproblem		$P_{ik}^{(n)}$	$\Pi_{ik}^{(n)}$	$P_{ik}^{(n)}$	$P_{ik}^{(n)}$
Visitenproblem			$V_{ik}^{(G)}$	Hauptlösung	$V_{ik}^{(H)}$
Absorptionsproblem		$a_{ir}^{(n)}; A_i^{(n)}$ A_i	$a_{ir}^{(n)}; a_{ir}$ $A_i^{(n)}; A_i$		$a_{ir}^{(n)}; a_{ir}$ $A_i^{(n)}; A_i$

Abschließend sollen noch kurz die wichtigsten Methoden zur Herleitung der Ergebnisse genannt werden.

Die Hauptlösungen der Differenzengleichungen, das sind die Lösungen für die unbegrenzten Ebenen, sind im wesentlichen nach einem Verfahren, das Stöhr 1950 für einige spezielle Differenzengleichungen angab, hergeleitet worden. Es handelt sich um eine Ausdehnung des Laplaceschen Verfahrens auf mehrere Dimensionen. Man sucht partikuläre Lösungen der Differenzengleichungen, die von Parametern abhängen. Durch geeignete Integration über diese Parameter erfüllt man dann auch die Anfangswerte und hat eine Integraldarstellung für die gesuchte Lösung.

Die Konstruktionen der verzweigten Hauptlösungen, das sind die — asymptotischen — Lösungen der Probleme auf der Riemannschen Fläche der Quadratwurzel, sind nach einem Verfahren gelungen, das Sommerfeld 1896 für die Lösung von Randwertproblemen der Wellengleichung entwickelt hat. Man gewinnt die Lösungen als Schleifenintegrale im Komplexen.

Die Ableitung der Lösungen für die berandeten Gebiete geschieht dann mit Hilfe des Spiegelungsprinzips, das von Mises in seinem Lehrbuch 1931 wohl zum ersten Male, allerdings auf eindimensionale und asymptotische Lösungen von Irrfahrtaufgaben anwendete.

Zur Frage nach der Eindeutigkeit der Lösungen sei noch kurz erwähnt, daß diese für die Lösungen der Übergangs- und Absorptionsprobleme generell gezeigt werden konnte. Man benutzt dabei das in der Theorie der Differentialgleichungen übliche Verfahren, die Differenz zweier — angenommener — Lösungen zu betrachten und zeigt, daß diese identisch verschwinden muß. Die Eindeutigkeit der Lösung des Visitenproblems bei der symmetrischen Irrfahrt wurde von Roos 1954 gezeigt, für die unsymmetrische Irrfahrt gelang das bisher noch nicht.

Vereinfachte Herleitung des Heaviside-Kalküls

Von L. Holzer

Für den *Heaviside*-Kalkül wurden die verschiedensten Herleitungen z.B. mit Hakenintegralen oder mit Hilfe der *Laplace*-Transformation durchgeführt. Hier wird ein ganz leichter Beweis entwickelt, der außer den selbstverständlich vorausgehenden Sätzen über Differentialgleichungen nur der Partialbruchzerlegung bedarf. Aus der Methode geht sofort hervor, daß die in manchen Lehrbüchern der Elektrotechnik stehende Einschränkung, der *Heaviside*-Kalkül brauche nicht zu gelten, wenn einzelne (oder alle) charakteristische Wurzeln positive Realteile haben, gänzlich überflüssig ist. Eine ausführliche Darstellung erscheint demnächst in der „Zeitschrift für Fernmeldetechnik und Elektroakustik“.

Anschrift: Prof. Dr. Ludwig Holzer, Rostock, Augustenstr. 34

Konvergenz des Differenzenverfahrens bei partiellen Differentialgleichungen vom parabolischen Typ

Von Rudolf Krawczyk

Analog dem *Nagumo-Westphalschen* Lemma¹⁾ für partielle Differentialgleichungen vom parabolischen Typ wird für entsprechende Differenzengleichungen ein Satz formuliert, aus dem für Näherungslösungen Fehlerabschätzungen hergeleitet werden können. Die Anwendung dieser Fehlerabschätzungsformeln gestattet Konvergenzaussagen für das Differenzenverfahren.

In der x - y -Ebene ist eine Menge M von Punkten (x_i, y_k) gegeben. (Es handelt sich dabei um Schnittpunkte von zur y -Achse parallelen Geraden mit äquidistantem Abstand h und zur x -Achse parallelen Geraden mit äquidistantem Abstand l).

M_I sei die Menge der inneren Punkte und M_A die der Randpunkte. Die Differenzengleichungen lauten:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta w_{i+1,k}}{h} - f\left(x_i, y_k, w_{i,k}, \frac{\delta w_{i,k}}{2l}, \nabla^2 \frac{w_{i,k+1}}{l^2}\right) &= 0, & (x_{i+1}, y_k) \in M_I \\ w_{i,k} - \zeta_{i,k} &= 0 & (x_i, y_k) \in M_A \end{aligned} \right\} \dots (1).$$

(Dabei bedeuten: Δ = rückwärts genommener Differenzen-Operator in x -Richtung, δ = zentraler Diff.-Operator in y -Richtung, ∇ = rückwärts genommener Diff.-Operator in y -Richtung.)

Für $(x_{i+1}, y_k) \in M_I$ und beliebige r, s, t erfülle $f(x_i, y_k, r, s, t)$ die folgenden Voraussetzungen:

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \alpha(h, l) (t_1 - t_2) \leq f(x_i, y_k, r, s, t_1) - f(x_i, y_k, r, s, t_2) \leq A(h, l) (t_1 - t_2), \\ \text{für } t_1 \geq t_2 \text{ mit } \frac{2 A(h, l) h}{l^2} = \lambda(h, l) < 1 \end{aligned} \right\} \dots (1,1)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta(h, l) (s_1 - s_2) \leq f(x_i, y_k, r, s_1, t) - f(x_i, y_k, r, s_2, t) \leq b(h, l) (s_1 - s_2), \\ \text{für } s_1 \geq s_2 \text{ mit } \alpha(h, l) - l/2 B(h, l) \geq 0 \end{aligned} \right\} \dots (1,2)$$

dabei sei $B = \max(|\beta|, |b|)$

$$\left. \begin{aligned} -c(h, l) (r_1 - r_2) \leq f(x_i, y_k, r_1, s, t) - f(x_i, y_k, r_2, s, t), \\ \text{für } r_1 \geq r_2 \text{ mit } \frac{h \cdot c(h, l)}{1 - \lambda(h, l)} < 1 \end{aligned} \right\} \dots (1,3).$$

Bezeichnet man den durch Gleichung (1) definierten Operator mit T , so ist $T w_{i,k} = 0$, und es gilt folgender Satz:

Es seien $v_{i,k}$ und $V_{i,k}$ auf M definierte Funktionen, welche der Ungleichung

$$T v_{i,k} \leq 0 \leq T V_{i,k}$$

genügen, dann folgt

$$v_{i,k} \leq w_{i,k} \leq V_{i,k} \dots (2),$$

d. h. T ist ein Operator von monotoner Art.

¹⁾ Vgl.: K. Nickel, Einige Eigenschaften von Lösungen der *Prandtl'schen* Grenzschichtdifferentialgleichungen, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 2, Nr. 1, 1958, p. 1—31.

Aus diesem Satz können Abschätzungssätze hergeleitet werden, mit deren Hilfe man Konvergenzaussagen für das Differenzenverfahren machen und Fehlerabschätzungen durchführen kann. Diese Sätze sind auch auf die *v. Misessche* Grenzsichtdifferentialgleichung

$$u_x = \sqrt{U^2 - u} u_{yy}$$

mit den Anfangs- und Randwerten

$$u(x_0, y) = \tilde{u}(y); \quad u(x, 0) = U^2(x); \quad \lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = 0$$

anwendbar. Bisher hat man infolge der Randsingularität für $y = 0$ auf die Verwendung des Differenzenverfahrens verzichtet.

Anschrift: Rudolf Krawczyk, Karlsruhe, Engesserstr. 6

Integraloperatoren in der Theorie partieller Differentialgleichungen

Von Erwin Kreyszig

Für verschiedene Klassen elliptischer partieller Differentialgleichungen existieren Integraloperatoren, die komplex-analytische Funktionen in Lösungen dieser Differentialgleichungen transformieren. Diese Tatsache ermöglicht es, die Theorie der Lösungen partieller Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage aufzubauen. Unter Benutzung von Sätzen der Funktionentheorie gewinnt man auf diese Weise Ergebnisse über die Natur und Verteilung der Singularitäten, das Wachstumsverhalten und andere grundlegende Eigenschaften der genannten Lösungen. Die Theorie der Integraloperatoren wurde von S. Bergman begründet. Einen Überblick über den gegenwärtigen Stand der Entwicklung und zahlreiche Literaturhinweise findet man in [1]. Die Operatoren sind auch im Zusammenhang mit praktischen Problemen, z. B. in der Theorie der kompressiblen Strömungen, von erheblicher Bedeutung, vgl. [2].

Ein wichtiges Problem ist die Auswahl geeigneter Operatoren, d. h. solcher Operatoren, die möglichst viele grundlegende Eigenschaften der analytischen Funktionen invariant lassen oder in einfacher Weise transformieren, so daß man vermöge funktionentheoretischer Sätze auf das Verhalten der mittels eines Operators gewonnenen Lösungen schließen kann. Einzelne Operatoren dieser Art sind bekannt, aber von einer systematischen Klassifizierung praktisch brauchbarer Operatoren ist man zur Zeit noch weit entfernt. Weiterhin ist es im Zusammenhang mit praktischen Anwendungen von entscheidender Bedeutung, daß die Theorie der bisher eingeführten Operatoren in allen Einzelheiten entwickelt wird.

Der Übergang von Gleichungen in 2 unabhängigen Veränderlichen zu Gleichungen in 3 unabhängigen Veränderlichen bringt wesentliche Schwierigkeiten mit sich, vgl. [1]. Wir betrachten

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz} = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

oder

$$H_{XX} - H_{ZZ^*} = 0 \quad \dots \dots \dots (2),$$

wobei $X = x, Z = (z + iy)/2, Z^* = -(z - iy)/2$ und $H(X, Z, Z^*) \equiv \psi(x, y, z)$ ist. Bezeichnet $f(u, \zeta)$ eine analytische Funktion von

$$u = X + Z\zeta + Z\zeta^{-1}$$

und ζ , so ist

$$H(X, Z, Z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} f(u, \zeta) \zeta^{-1} d\zeta \quad \dots \dots \dots (3)$$

eine harmonische Funktion. Diese von Whittaker [3] herrührende Darstellung läßt sich zu einer systematischen Untersuchung harmonischer Funktionen benutzen. Für $f = u^m \zeta^n$ erhält man im wesentlichen Kugelfunktionen. Durch die Wahl geeigneter Funktionen f kann man harmonische Funktionen mit vorgegebenen algebraischen Singularitätenkurven konstruieren. Zum Beispiel gilt:

Es sei K ein gegebener Kreis. Dann lassen sich die Koeffizienten a, b, c in

$$f = 1/(a + (b + u)\zeta + c\zeta^2)$$

so bestimmen, daß (3) längs K singulär und sonst überall regulär ist.

Weiterhin kann man die geometrischen Eigenschaften der Singularitätenkurven der Funktionen H , die rationalen Funktionen f entsprechen, mit Hilfe der Methoden der algebraischen Geometrie in allgemeiner Weise untersuchen.

Die

$$f_{mn} = \zeta^n / (u - k)^m \quad (m, n \text{ ganz}, m > 0)$$

entsprechenden harmonischen Funktionen H sind längs der Ebene $x = \operatorname{Re} k$ unstetig. Sie lassen sich durch hypergeometrische Funktionen darstellen. Auf diese Weise gewinnt man den Anschluß an bekannte spezielle Funktionen und kann außerdem die *Fuchs-Frobeniussche* Theorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen im Komplexen zur Untersuchung dieser Funktionen heranziehen. Diese wichtige Tatsache gilt übrigens auch im Zusammenhang mit anderen Integraloperatoren; vgl. [4], [5], [6]. Kompliziertere rationale und algebraische Funktionen f führen auf harmonische Funktionen, die Singularitätenkurven und längs endlich vieler Regelflächen endliche Sprünge besitzen und sonst regulär sind.

Literatur

- [1] S. Bergman, Integral Operators in the Theory of Linear Partial Differential Equations, Erg. Math., im Druck.
- [2] R. v. Mises, Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow, 1958.
- [3] E. T. Whittaker, On the partial differential equations of mathematical physics. Math. Ann. **57** (1903), S. 333—355.
- [4] E. Kreyszig, On a class of partial differential equations. J. rat. Mech. Analysis **4** (1955), S. 907—923.
- [5] E. Kreyszig, On certain partial differential equations and their singularities. J. rat. Mech. Analysis **5** (1956), S. 805—820.
- [6] E. Kreyszig, Relations between properties of solutions of partial differential equations and the coefficients of their power series development. J. Math. Mech. **6** (1957), S. 361—382.

Anschrift: Prof. Dr. E. Kreyszig, z. Z. Aachen, Templergraben 55

Über Erwartungswerte und Varianzen von Ranggrößen in kleinen Stichproben

Von Otto Ludwig*)

Seien x_1, \dots, x_n Ranggrößen (order statistics) in Stichproben aus einer kontinuierlichen Gesamtheit mit existierender Varianz σ^2 . Dann gilt die Ungleichung

$$E(x_j - x_i) \leq \sigma \sqrt{\frac{2n}{\binom{2n}{n}} \left[\binom{2j-2}{j-1} \binom{2n-2j}{n-j} + \binom{2i-2}{i-1} \binom{2n-2i}{n-i} - 2 \binom{i+j-2}{i-1} \binom{2n-i-j}{n-j} \right]}.$$

Dies folgt nach der *Schwarzschen* Ungleichung

$$[f a b dx]^2 \leq f a^2 dx \cdot f b^2 dx \quad \text{mit} \quad a = (x - \mu) \sqrt{f(x)}, \quad b = [{}_n f_j(x) - {}_n f_i(x)] / \sqrt{f(x)},$$

wobei μ der Mittelwert und $f(x)$ die Dichte der ursprünglichen Verteilung und ${}_n f_i(x)$ diejenige der j -ten Ranggröße ist, also

$${}_n f_j(x) = n \binom{n-1}{j-1} \cdot [1 - F(x)]^{n-j} F(x)^{j-1} f(x), \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Ein Spezialfall ist die folgende Ungleichung für den Abstand zweier benachbarter Ranggrößen:

$$E(x_{i+1} - x_i) \leq \sigma \cdot n \cdot \sqrt{\frac{1}{(2n-1)(2n-3)} \frac{\binom{n-1}{i-1} \binom{n-1}{i}}{\binom{2n-4}{2i-2}}}.$$

ein weiterer die von Plackett (1947), hergeleitete für die Spannweite:

$$E(x_n - x_1) \leq \sigma n \cdot \sqrt{\frac{2}{2n-1} \left(1 - \frac{1}{\binom{2n-2}{n-1}} \right)}.$$

Diejenigen Verteilungen, für die die Schranken erreicht werden, erhält man aus $a = \text{const} \cdot b$. Es lassen sich viele weitere Ungleichungen und Gleichungen für bestimmte Verteilungen für kleine Stichproben finden. Für Ausführlicheres, besonders im Hinblick auf die Anwendungen, vgl. „Biometrische Zeitschrift“ **1**, Heft 3 (1939).

Anschrift: Dr. O. Ludwig, Bad Nauheim, Kerckhoff-Institut

*) Statistische Abteilung des W. G. Kerckhoff-Instituts der Max-Planck-Gesellschaft.

Zur numerischen Behandlung des inneren Neumannschen und des Robinschen Problems

Von E. Martensen*)

Die Integralgleichung des inneren *Dirichletschen* Problems [1, 2, 3] (erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie für ein Innengebiet) wird in zwei Dimensionen durch die bekannten *Nyströmschen* Verfahren [4, 5], die teils auf der *Gaußschen*, teils auf der *Tschebyscheffschen* Quadraturformel beruhen, mit hoher Genauigkeit numerisch aufgelöst. Da die in diesem Falle auftretenden Integranden periodische Funktionen sind, bekommt man bei Anwendung der bequemeren Rechteckformel ein Ergebnis von entsprechend hoher Genauigkeit [6]. Das innere *Neumannsche* Problem [1, 2, 3] (zweite Randwertaufgabe der Potentialtheorie für ein Innengebiet) führt in zwei Dimensionen im Gegensatz zum *Dirichletschen* Problem auf eine Integralgleichung, deren zugehörige homogene Gleichung eine nichttriviale Lösung besitzt. Es wird im folgenden eine Methode zur numerischen Auflösung dieser Integralgleichung beschrieben, die dem genannten Umstand Rechnung trägt, indem die Integralgleichung mit Hilfe der Rechteckformel auf ein linear abhängiges Gleichungssystem zurückgeführt wird. Dabei wird das *Robinsche* Problem [1] als Spezialfall des *Neumannschen* Problems (identisch verschwindende Normalableitungen bei vorgegebener Gesamtbelegung) ebenfalls berücksichtigt.

Das *Neumannsche* Problem trat bei den im Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik in München durchgeführten Stabilitätsuntersuchungen von Gleichgewichtslösungen der magnetohydrodynamischen Gleichungen auf, wenn auch in mehrfach zusammenhängenden Gebieten. Das skalare Potential der (stromfreien) Störung eines statischen Magnetfeldes in einem Vakuum, welches ein Plasma von einem äußeren Leiter trennt, genügt nämlich der *Laplace-Gleichung*, während die Normalableitungen auf der ungestörten Plasma-Oberfläche vorgeschrieben sind und am äußeren Leiter verschwinden müssen. Dieses Problem ist seiner Natur nach ein dreidimensionales. Um jedoch die bei einer numerischen Behandlung des Problems gegebenen Verhältnisse besser überblicken zu können, wurde zunächst der zweidimensionale Fall untersucht, und zwar unter Verzicht auf den mehrfachen Zusammenhang des Gebietes, in dem die Lösungen gesucht sind. Davon soll an dieser Stelle berichtet werden.

Es sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet der (x, y) -Ebene, deren stetig gekrümmte Berandung Γ die Parameterdarstellung $x(t), y(t), 0 \leq t \leq 2\pi$, besitzt. Die Funktionen $x(t), y(t)$ können ohne Einschränkung als mit 2π periodisch und für alle t zweimal stetig differenzierbar angesehen werden, wobei die ersten Ableitungen $\dot{x}(t), \dot{y}(t)$ nirgends gleichzeitig verschwinden; der Rand Γ soll ferner mit wachsendem t im Gegenuhrzeigersinn umlaufen werden. Im inneren *Neumannschen* Problem [1, 2, 3] sucht man nach in G harmonischen Funktionen $u(x, y)$, die auf Γ die Bedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{f(t)}{\sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2}} \quad \dots \dots \dots (1)$$

erfüllen, wenn $\frac{\partial}{\partial n}$ die Differentiation in Richtung der äußeren Normalen und $f(t)$ eine auf Γ vorgegebene stetige Funktion mit der Periode 2π bedeutet, die auf Grund des *Gaußschen* Integralsatzes der Bedingung

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

notwendig genügen muß. Das Problem wird bekanntlich gelöst durch

$$u(x, y) = \int_0^{2\pi} \varrho(\tau) \ln \frac{1}{\sqrt{[x - x(\tau)]^2 + [y - y(\tau)]^2}} d\tau \quad \dots \dots \dots (3),$$

d. h. in der Form eines Potentials einer einfachen Belegung $\varrho(t)$, die auf Γ stetig ist und der Integralgleichung zweiter Art

$$\varrho(t) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(t, \tau) \varrho(\tau) d\tau = \frac{1}{\pi} f(t) \quad \dots \dots \dots (4)$$

*) Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik in München.

mit stetigem, nicht notwendig symmetrischem Kern

$$K(t, \tau) = 2 \frac{\partial}{\partial t} \arctan \frac{y(t) - y(\tau)}{x(t) - x(\tau)} \dots \dots \dots (5)$$

gehorcht. Die Integralgleichung (4) besitzt jedoch mehrdeutige Lösungen $\varrho(t)$, da die zugehörige homogene Gleichung nach bekannten Sätzen der Potentialtheorie eine bis auf einen konstanten Faktor eindeutige nichttriviale Lösung besitzt; erst durch Vorschreiben der Gesamtbelegung (Gesamtergiebigkeit)

$$\int_0^{2\pi} \varrho(t) dt = E \dots \dots \dots (6)$$

wird die Lösung eindeutig.

Wählt man $n \geq 2$ Konturpunkte auf Γ , die den äquidistanten Parameterwerten

$$t_\mu = \frac{2\pi\mu}{n}, \quad \mu = 0 \dots (n-1) \dots \dots \dots (7),$$

entsprechen sollen, so geht (4) mit Hilfe der Rechteckformel in das lineare Gleichungssystem

$$\varrho_\mu - \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} K_{\mu\nu} \varrho_\nu = \frac{1}{\pi} f_\mu, \quad \mu = 0 \dots (n-1) \dots \dots \dots (8)$$

über, wenn man die Abkürzungen $\varrho(t_\mu) = \varrho_\mu$, $K(t_\mu, t_\nu) = K_{\mu\nu}$ etc. einführt. Wir setzen jetzt für das numerische Verfahren voraus, daß die Bedingung (2) in der Form

$$\sum_{\mu=0}^{n-1} f_\mu = 0 \dots \dots \dots (9),$$

d. h. bei Anwendung der Rechteckformel, erfüllt ist. Das Gleichungssystem (8) hat nun im allgemeinen nicht, wie es wünschenswert wäre, mit der Integralgleichung (4) die Eigenschaft gemeinsam, daß das zugehörige homogene Problem eine nichttriviale Lösung besitzt, sondern es ist im allgemeinen nur „fast linear abhängig“¹⁾. Wenn man vielleicht auch daran denken könnte, ein derartiges System in einem bestimmten Sinne optimal aufzulösen, so ist doch eine Methode vorzuziehen, die die genannte Schwierigkeit vermeidet, indem die Integralgleichung (4) direkt in ein linear abhängiges Gleichungssystem überführt wird. Dies gelingt, wenn man (4) unter Benutzung der aus (5) folgenden Identität

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(t, \tau) dt = 1 \dots \dots \dots (10)$$

in

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [K(\tau, t) \varrho(t) - K(t, \tau) \varrho(\tau)] d\tau = \frac{1}{\pi} f(t) \dots \dots \dots (11)$$

umformt und anschließend die Rechteckformel anwendet:

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu \neq \mu}^{n-1} (K_{\nu\mu} \varrho_\mu - K_{\mu\nu} \varrho_\nu) = \frac{1}{\pi} f_\mu, \quad \mu = 0 \dots (n-1) \dots \dots \dots (12).$$

Die lineare Abhängigkeit folgt nunmehr in Verbindung mit (9) unmittelbar daraus, daß (12), über alle μ summiert, identisch Null ergibt. Dann darf man weiter ohne Einschränkung der Allgemeinheit eine beliebige der Gleichungen (12) fortlassen; damit ist man aber in der Lage, zusätzlich die aus (6) folgende Bedingung

$$\frac{1}{n} \sum_{\mu=0}^{n-1} \varrho_\mu = \frac{E}{2\pi} \dots \dots \dots (13)$$

zu erfüllen. Die Lösung ϱ_μ , $\mu = 0 \dots (n-1)$, des so erhaltenen Gleichungssystems stellt die gesuchte numerische Näherungslösung der Integralgleichung (4) und der Nebenbedingung (6) dar.

Neben der methodischen Vereinfachung bekommt man auf diese Weise noch den weiteren Vorteil, daß in (12) die Diagonalelemente $K_{\mu\mu}$, $\mu = 0 \dots (n-1)$, im Gegensatz zu (8) nicht mehr vorkommen. Dies bedeutet praktisch auf Grund des aus (5) folgenden Grenzwerts

$$K(t, t) = \lim_{\tau \rightarrow t} K(t, \tau) = \frac{\dot{x}(t) \ddot{y}(t) - \dot{y}(t) \ddot{x}(t)}{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2} \dots \dots \dots (14),$$

¹⁾ Darunter ist ein Gleichungssystem mit einer Matrix verstanden, deren sämtliche n -reihige Determinanten klein sind.

daß nur die ersten, nicht aber die zweiten Ableitungen der Funktionen $x(t)$, $y(t)$ für das Verfahren benötigt werden, so daß bei etwaiger numerischer Differentiation eine im allgemeinen erhebliche Fehlerquelle vermieden wird.

Wir veranschaulichen die beschriebene Methode an einem Beispiel, für welches die Ableitungen $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\ddot{x}(t)$, $\ddot{y}(t)$ exakt bekannt sind (also nicht erst durch numerische Differentiation gewonnen werden müssen) und das wir mit Hilfe beider Gleichungssysteme (8) und (12) untersuchen wollen. Wir wählen als Berandung Γ eine Ellipse vom Achsenverhältnis $\beta > 0$, die bereits früher bei der praktischen Behandlung des *Dirichletschen* Problems eine Rolle gespielt hat [3, 4, 6]:

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \beta \sin t \quad \dots \quad (15).$$

Es folgt aus (5)

$$K(t, \tau) = \frac{2\beta}{1 + \beta^2 - (1 - \beta^2) \cos(t + \tau)} \quad \dots \quad (16).$$

Die Randbedingung sei

$$f(t) = \frac{2\pi\beta}{1 + \beta} \cos t \quad \dots \quad (17),$$

die insbesondere nach Übergang zu diskreten Werten f_μ , $\mu = 0 \dots (n-1)$, die Bedingung (9) erfüllt. Für das *Neumannsche* Problem ist nun die Vorgabe der Gesamtbelegung E im allgemeinen ohne wesentliches Interesse; da sich nämlich die Lösung (3) bei verschiedener Wahl von E nur um eine additive Konstante unterscheidet, könnte man sich der Einfachheit halber auf den Fall $E = 0$ beschränken. Beim *Robinschen* Problem [1], d. h. im Falle $f(t) = 0$, interessiert jedoch gerade $\varrho(t)$ für $E \neq 0$, während hier $u(x, y) = \text{const.}$ von vornherein bekannt ist. Aus diesem Grunde wählen wir für unser Beispiel eine nicht verschwindende Gesamtbelegung

$$E = 2\pi \quad \dots \quad (18).$$

Die Lösung von (4) und (6) lautet dann

$$\varrho(t) = 1 + \cos t \quad \dots \quad (19),$$

wie man leicht nachprüfen kann. Die numerischen Ergebnisse sind für den Fall $\beta = \frac{1}{5}$ und $n = 16$ in Tab. 1 dargestellt. Dabei bedeutet $\tilde{\varrho}_\mu^{(i)}$, $i = 0 \dots 8$, $\mu = 0 \dots 15$, diejenige Lösung des fast linear abhängigen Gleichungssystems (8) in Verbindung mit (13), die man erhält, wenn man in (8) die Gleichung für $\mu = i$ fortläßt, so daß diese damit *nicht* streng erfüllt ist (die $\tilde{\varrho}_\mu^{(9)} \dots \tilde{\varrho}_\mu^{(15)}$ sind bzw. zu den $\tilde{\varrho}_\mu^{(7)} \dots \tilde{\varrho}_\mu^{(1)}$ bezüglich $\mu = 8$ symmetrisch und daher nicht aufgeführt). Ferner ist ϱ_μ^* , $\mu = 0 \dots 15$, aus den streng linear abhängigen Gleichungen (12) und (13) berechnet, und es bedeutet schließlich ϱ_μ , $\mu = 0 \dots 15$, die strenge Lösung gemäß (19). Es zeigt sich deutlich, daß ϱ_μ^* der exakten Lösung ϱ_μ am nächsten kommt; andererseits treten die Abweichungen der $\tilde{\varrho}_\mu^{(i)}$ von den ϱ_μ besonders auffällig für $\mu = i$ hervor.

Die numerische Rechnung wurde auf der elektronischen Rechenmaschine G 2 des Max-Planck-Instituts für Physik und Astrophysik in München durchgeführt.

Tabelle 1. Numerische Näherungslösungen $\tilde{\varrho}_\mu^{(0)} \dots \tilde{\varrho}_\mu^{(8)}$, ϱ_μ^* im Vergleich zur strengen Lösung ϱ_μ der Integralgleichung

μ	$\tilde{\varrho}_\mu^{(0)}$	$\tilde{\varrho}_\mu^{(1)}$	$\tilde{\varrho}_\mu^{(2)}$	$\tilde{\varrho}_\mu^{(3)}$	$\tilde{\varrho}_\mu^{(4)}$	$\tilde{\varrho}_\mu^{(5)}$	$\tilde{\varrho}_\mu^{(6)}$	$\tilde{\varrho}_\mu^{(7)}$	$\tilde{\varrho}_\mu^{(8)}$	ϱ_μ^*	ϱ_μ
0	1,9401	1,9988	2,0078	2,0133	2,0169	2,0193	2,0209	2,0219	2,0221	2,0008	2,0000
1	1,9219	1,8773	1,9310	1,9359	1,9396	1,9421	1,9438	1,9447	1,9450	1,9246	1,9239
2	1,7120	1,7121	1,6633	1,7153	1,7191	1,7219	1,7238	1,7248	1,7251	1,7076	1,7071
3	1,3898	1,3893	1,3876	1,3377	1,3889	1,3920	1,3943	1,3955	1,3959	1,3830	1,3827
4	1,0069	1,0065	1,0049	1,0024	0,9518	1,0024	1,0049	1,0065	1,0069	1,0000	1,0000
5	0,6228	0,6225	0,6212	0,6190	0,6159	0,5647	0,6146	0,6163	0,6168	0,6170	0,6173
6	0,2968	0,2964	0,2954	0,2936	0,2907	0,2869	0,2350	0,2837	0,2836	0,2924	0,2929
7	0,0787	0,0784	0,0775	0,0759	0,0733	0,0697	0,0648	0,0110	0,0556	0,0754	0,0761
8	0,0021	0,0018	0,0009	-0,0007	-0,0031	-0,0067	-0,0122	-0,0212	-0,0799	-0,0008	0,0000
9	0,0787	0,0784	0,0774	0,0757	0,0730	0,0688	0,0610	0,0507	0,0556	0,0754	0,0761
10	0,2968	0,2964	0,2952	0,2932	0,2897	0,2828	0,2737	0,2800	0,2836	0,2924	0,2929
11	0,6228	0,6223	0,6209	0,6179	0,6117	0,6033	0,6105	0,6154	0,6168	0,6170	0,6173
12	1,0069	1,0062	1,0038	0,9982	0,9904	0,9982	1,0038	1,0062	1,0069	1,0000	1,0000
13	1,3898	1,3884	1,3835	1,3764	1,3848	1,3909	1,3939	1,3954	1,3959	1,3830	1,3827
14	1,7120	1,7083	1,7021	1,7112	1,7180	1,7216	1,7236	1,7247	1,7251	1,7076	1,7071
15	1,9219	1,9169	1,9273	1,9350	1,9393	1,9420	1,9437	1,9447	1,9450	1,9246	1,9239

Literatur

- [1] N. M. Günter, Die Potentialtheorie und ihre Anwendung auf Grundaufgaben der Mathematischen Physik. Leipzig 1957: Teubner.
- [2] É. Goursat, Cours d'Analyse Mathématique, t. III. Paris 1942: Gauthier-Villars.
- [3] W. Schmeidler, Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik I. Leipzig 1950: Geest & Portig.
- [4] E. J. Nyström, Über die praktische Auflösung von linearen Integralgleichungen mit Anwendungen auf Randwertaufgaben der Potentialtheorie. Commentationes Phys.-Math. Societas Scientiarum Fennica, Helsingfors IV Nr. 15 (1928), S. 1—52.
- [5] E. J. Nyström, Über die praktische Auflösung von Integralgleichungen mit Anwendungen auf Randwertaufgaben. Acta Math. 54 (1930), S. 185—204.
- [6] L. W. Kantorowitsch u. W. I. Krylow: Näherungsmethoden der höheren Analysis. Berlin 1956: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.

Anschrift: Dr. E. Martensen, Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München 23, Aumeisterstraße

Pascal-Verteilung und Approximation durch Bernsteinsche Potenzreihen

Von W. Meyer-König und K. Zeller

Liegen n unabhängige *Bernoulli*-Versuche mit Erfolgswahrscheinlichkeit x vor, so gibt die Binomialverteilung

$$b_{nk} = b_{nk}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (n = 1, 2, \dots; k = 1, \dots, n)$$

die Wahrscheinlichkeit für k Erfolge in n Versuchen an. In Zusammenhang mit dieser Verteilung stehen die *Eulersche* Reihentransformation sowie die (einer Funktion f zugeordneten) *Bernsteinsche* Polynome

$$B_n(x) = B'_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Man wird nach ähnlichen Beziehungen bei anderen Verteilungen fragen. Dafür bietet sich als aussichtsreich die *Pascal*-Verteilung an, die die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des n -ten Erfolgs beim k -ten Versuch angibt. Sie ist, wenn die Erfolgswahrscheinlichkeit mit $1-x$ bezeichnet wird, gegeben durch

$$p_{nk} = p_{nk}(x) = (1-x)^n \binom{k-1}{n-1} x^{k-n} \quad (n = 1, 2, \dots; k = n, n+1, \dots).$$

Dieser Verteilung entspricht die *Taylor*sche Reihentransformation, die Rolle der *Bernstein*-polynome übernehmen gewisse Ausdrücke, die wir *Bernsteinsche* Potenzreihen nennen:

$$P_n(x) = P'_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} p_{nk} f\left(\frac{k-n}{k}\right) = (1-x)^n \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} x^{k-n} f\left(\frac{k-n}{k}\right) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Die $P_n(x)$ sind für alle n und für $0 \leq x < 1$ erklärt, wenn f in diesem Intervall beschränkt ist oder nur langsam wächst (siehe unten). Ist f überdies bei $x = 1$ linksseitig stetig, so hat $P_n(x)$ für $x \rightarrow 1$ einen Grenzwert, den wir zur Festlegung von $P_n(1)$ benützen.

Grundlegend ist folgender *Approximationssatz*: Ist f in $0 \leq x \leq 1$ stetig, so konvergieren die P_n in diesem Intervall gleichmäßig gegen f . Der Beweis beruht auf dem Prinzip der singulären Integrale (regulären Matrixtransformationen). Den dabei wesentlichen „Buckel“ des Kerns hebt man mit Hilfe der *Tschebyscheff*schen Ungleichung heraus.

Der Approximationssatz läßt sich lokalisieren. Man betrachtet dann Funktionen, die nur in einem Teilintervall $J = \langle x_1, x_2 \rangle$ stetig sind und einer Größenordnungsbedingung

$$|f(x)| \leq M e^{1-x^a} \quad (M \text{ und } a \text{ positive Konstanten, } 0 \leq x < 1)$$

genügen. Die $P_n(x)$ existieren nun in J allerdings nur für $n > n_0$. Im Falle $x_2 < 1$ erhält man durch Abbrechen der Potenzreihen auch approximierende Polynome.

Vgl. Verff., *Bernsteinsche* Potenzreihen, *Studia math.* (im Druck).

Anschriften: Prof. Dr. W. Meyer-König, Stuttgart-Sonnenberg, Falkenstraße 9
Prof. Dr. K. Zeller, Tübingen, Schillerstraße 7

Operatorenrechnung und ihre Beziehungen zur modernen Mathematik*)

Von Jan Mikusiński

Obwohl die Operatorenrechnung schon seit mehreren Jahrzehnten bekannt ist und angewendet wird, kann ihre Entwicklung keineswegs als abgeschlossen betrachtet werden. Deshalb bin ich gezwungen, eine Stoffauswahl vorzunehmen. Ich achte es für eine Ehre, daß die Tagungsleitung mich um besondere Berücksichtigung meiner eigenen Resultate gebeten hat.

Es gibt sehr viele verschiedene Auffassungen der Operatorenrechnung. Diese können in zwei Hauptgruppen geteilt werden.

I. Direkte Auffassung

Heaviside

Mikusiński

II. Integraltransformationen

Bromwich

$$\text{Carson: } p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

$$\text{Doetsch: } \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Die *Heavisidesche* Auffassung war sehr einfach. Heaviside behandelte den Differentialoperator $p = \frac{d}{dt}$ genau so wie eine übliche Zahl, und seine Rechnungen führten meistens zu guten Resultaten. Er kümmerte sich nicht um eine mathematische Begründung seiner Methode, so daß seine Resultate immer in der Luft hingen. Die erste korrekte Begründung verdanken wir dem Mathematiker Bromwich, der zu diesem Zweck eine komplexe Transformation verwendete. Eine mathematisch äquivalente, aber einfachere Begründung wurde durch Carson eingeführt. Der Buchstabe p in dem *Carsonschen* Integral bedeutet eine komplexe Veränderliche, so daß die Aufgabe für reelle Funktionen von t ins komplexe Gebiet übertragen wird. Damit aber verlieren die Operatoren ihren direkten Sinn und werden analytische Funktionen. Doetsch, der eine ähnliche Transformation, nämlich die *Laplacesche* Transformation verwendete, hat gezeigt, daß die neue Auffassung der Operatorenrechnung vieler neuer und interessanter Anwendungen fähig ist, vor allem im Gebiet der partiellen Differentialgleichungen. Nun aber beschränken die Integraltransformationen das Anwendungsgebiet auf solche Funktionen, die transformierbar sind.

Diese Beschränkung kann durch eine Rückkehr zur direkten *Heavisideschen* Auffassung aufgehoben werden. Dies ist möglich geworden dank der Fortschritte und Verbreitung der modernen Algebra. Diese Idee kann man schon bei verschiedenen Mathematikern finden, z. B. in dem berühmten Buch von Courant und Hilbert. Diese Mathematiker betrachteten nämlich formale Brüche, bei denen im Zähler und Nenner *Heavisidesche* Operatoren stehen. Diese Konstruktion kann sehr leicht mit den Begriffen der modernen Algebra streng begründet werden, aber da müssen im Nenner Operatoren von einer sehr einfachen Form stehen. Um einen wesentlichen Fortschritt zu erreichen, muß man als Hilfsmittel den bekannten Satz von Titchmarsh in die Theorie einziehen, der eine Ergänzung der Schar von Operatoren zu einem algebraischen Körper ermöglicht. Dieser Ideengang ist ausführlich in meinem Buch über die Operatorenrechnung dargestellt. Eine solche Auffassung führt zu einer völligen Begründung der Rechnungen, bei denen das Differenzieren nur in bezug auf die Zeitveränderliche t erfolgt. Will man dagegen auch das Differenzieren in bezug auf eine andere Veränderliche betrachten, wie es z. B. bei den partiellen Differentialgleichungen stattfindet, so muß man eine Ableitung in bezug auf diese Veränderliche definieren. Dies kann durch die Einführung des Grenzbegriffes einer Operatorenfolge erreicht werden. Dazu ist es nötig, genau den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz von üblichen Funktionen kennenzulernen. Dieser Begriff kann auch in den anderen Auffassungen der Operatorenrechnung nicht vermieden werden, obwohl er in Ingenieurkreisen als überflüssig angesehen wird. Eine Vernachlässigung der gleichmäßigen Konvergenz führt oft zu falschen Resultaten. Es gibt z. B. ein Buch, das schon in sieben oder mehr englischen und in einer russischen Ausgabe erschienen ist, in welchem man einen ganz falschen Satz findet. Um seine Falschheit einzusehen, braucht man nicht verwickelte oder künstlich konstruierte Funktionen in die angegebene Formel einzusetzen, es genügt die übliche Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Meiner Meinung nach muß die gleichmäßige Konvergenz ohnehin in der Operatorenrechnung betrachtet werden und sollte in den Lehrbüchern, sogar für Ingenieure,

*) Auf Einladung der Tagungsleitung gehaltener Hauptvortrag.

als übliches Hilfsmittel eingeführt werden. Außerdem ist dieser Begriff vom mathematischen und logischen Standpunkt aus einfacher als die übliche Konvergenz, und nur dieser Begriff führt zu „anständigen“ Funktionenräumen.

Jetzt möchte ich die Operatorenrechnung in der direkten, algebraischen Methode darstellen. Wir betrachten einen Ring in $0 \leq t < \infty$ von stetigen Funktionen mit der üblichen Addition und mit der Faltung $\int_0^\infty f(t-\tau)g(\tau)d\tau$ als Multiplikation. Der *Titchmarshsche* Satz besagt, daß dieser Ring keine Nullteiler besitzt. Deshalb läßt er sich zu einem Körper erweitern. Dies erfolgt durch die formale Betrachtung der Brüche $\frac{f}{g}$, die als *Heavisidesche* Operatoren erklärt werden. Diese Konstruktion ermöglicht schon alle Anwendungen auf die in der Operatorenrechnung betrachteten gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Eine Operatorenfolge $a_n = \frac{f_n}{g_n}$ heißt nach dem Operator $a = \frac{f}{g}$ konvergent, wenn es eine Funktion q gibt, so daß die Folge $a_n q$ lauter stetige Funktionen enthält, die gleichmäßig in jedem beschränkten Intervall nach der stetigen Funktion $a q$ konvergieren. Dieser Grenzbegriff ermöglicht es wie üblich, andere Begriffe der Analysis, wie z. B. die Ableitung oder das Integral der Funktionen, deren Werte Operatoren sind, zu definieren. Dadurch gehen die partiellen Differentialgleichungen in der operatorischen Auffassung in die gewöhnlichen Differentialgleichungen über, und die letzteren lassen sich durch übliche Methoden auflösen.

Das ist schon eine knappe Darstellung des Stoffes, der in meinem Buch betrachtet wird. Ich halte es für wenig interessant, hier auf die Einzelheiten näher einzugehen. Es seien nur noch die interessanten Anwendungen auf dem Gebiet der Differenzen-Differentialgleichungen erwähnt, die von Wloka neuzeitlich bearbeitet wurden. Wloka hat nämlich gezeigt, daß sich für diese Gleichungen eine zu der der Differentialgleichungen analoge Theorie aufbauen läßt.

Und nun möchte ich zu einigen weiteren Fortschritten übergehen, die nach dem Erscheinen meines Buches erreicht wurden.

Wie ich schon früher gesagt habe, lassen sich die operatorischen Differentialgleichungen durch übliche Methoden lösen. Eine operatorische Differentialgleichung

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x = f \quad \dots \quad (1)$$

ist eine Differentialgleichung, deren Koeffizienten Operatoren sind, und wobei die gesuchte Funktion x sowie die rechte Seite f operatorische Werte annehmen. Die Auflösung dieser Differentialgleichung besteht darin, daß man zuerst eine charakteristische Gleichung

$$w^n + a_1 w^{n-1} + \dots + a_{n-1} = 0$$

bildet. In der Operatorenrechnung kann es aber vorkommen, daß diese Gleichung weniger Wurzeln besitzt, als ihr Grad beträgt. Das ist die erste Komplikation. Weiter, falls eine Wurzel existiert, braucht keine entsprechende Lösung der Differentialgleichung zu existieren. Das ist die zweite Komplikation. Deshalb muß man in den Beweisen neue Methoden anwenden, die manchmal zu verwickelten Rechnungen führen. Diese Rechnungen wurden in meinem Buch teilweise fortgelassen, und ich habe den Leser auf die Originalarbeiten verwiesen. Außerdem wurde der Fall, daß die Anzahl der Wurzeln kleiner als der Grad der charakteristischen Gleichung ist, bisher noch nicht allgemein gelöst.

Diese Lücke ist jetzt schon völlig geschlossen. Man kann nämlich die Differentialgleichung rein algebraisch betrachten, indem die Ableitung in einem beliebigen linearen algebraischen Raum durch einfache Axiome definiert werden kann.

Sei D ein beliebiger Endomorphismus in dem betrachteten linearen Raum. Dann ist das Polynom

$$P(D) = a_n D^n + \dots + a_0,$$

dessen Koeffizienten die Koeffizienten des linearen Raumes sind, stets ein Endomorphismus. Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$G(P)$ = Grad des Polynomes P ,

$A(P)$ = Anzahl von linear unabhängigen Lösungen der Gleichung $P(D)x = 0$.

In der üblichen Theorie der Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten gilt: $G(P) = A(P)$. Im Falle der operatorischen Differentialgleichungen können wir nur behaupten, daß

1°

$$A(P) \leq G(P).$$

Diese Ungleichung wird als erstes Axiom für den Endomorphismus D angenommen. Weiter nehmen wir an, daß

$$2^\circ \quad A(PQ) = A(P) + A(Q).$$

Diese logarithmische Eigenschaft von A ist trivialerweise in der üblichen Theorie erfüllt, weil die Grade der Polynome sich addieren, wenn diese Polynome multipliziert werden.

Stellt man die obigen zwei Axiome an die Spitze, so läßt sich die ganze Theorie der Differentialgleichungen aufbauen. Die neuen Beweise werden viel allgemeiner und zugleich einfacher, so daß die mühsamen Rechnungen mit den Determinanten fortfallen. Insbesondere erhalten wir eine weitgehende Vereinfachung der Beweise für die operatorischen Differentialgleichungen. Die algebraische Theorie der Differentiation ermöglicht es auch, die Exponentialfunktion und solche Begriffe wie die Faltung und die Laplace-Transformation rein algebraisch einzuführen.

Jetzt möchte ich einige Beziehungen der Operatorenrechnung zur Distributionentheorie darlegen. Die Distributionen wurden durch Soboleff und Schwartz in gleicher Weise als Funktionale in gewissen Funktionenräumen erklärt. Dagegen sind die Operatoren eine Art von Brüchen, so daß, logisch genommen, beide Begriffe ganz verschieden sind. Trotzdem hat man oft davon gesprochen, daß diese Begriffe nahe verwandt sind, sogar daß manche Distributionen Operatoren sind und umgekehrt. Dieser Sprechweise kann leicht ein mathematischer Sinn gegeben werden. Jede Distribution ist nämlich die distributionische Grenze einer Folge von stetigen Funktionen. Ähnlich ist jeder Operator die operatorische Grenze einer solchen Folge. Gibt es eine Folge, die distributionisch und operatorisch konvergiert, so können die entsprechende Distribution und Operator als einander gleich angesehen werden. Es gibt Distributionen, die keine Operatoren sind, und es gibt Operatoren, die keine Distributionen sind.

Die Operatoren sind gut geeignet zur Lösung von Aufgaben, bei denen die Veränderliche das unendliche Intervall $0 \leq t < \infty$ durchläuft. Die Möglichkeit der Division führt dann zu einfachen Rechnungen, die in der Distributionentheorie überhaupt nicht möglich sind. Dagegen sind die Distributionen für solche Aufgaben geeignet, bei denen die Veränderliche z. B. ein beiderseits unendliches Intervall $-\infty < t < \infty$ durchläuft. Die Benutzung von Operatoren ist in diesem Fall nicht möglich.

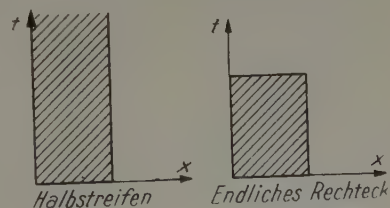
Es wäre wünschenswert, eine Verknüpfung von Operatoren und Distributionen so zu schaffen, daß der neue Begriff in bezug auf eine Veränderliche ein Operator und in bezug auf die andere eine Distribution ist. Ein solcher Begriff von Operator-Distribution wäre bei vielen Problemen aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen sehr bequem. Es kommt auf dasselbe hinaus, eine Distributionentheorie auf dem Raum von Funktionen, deren Werte Operatoren sind, aufzubauen. Ein analoges Problem hat sich neulich Schwartz gestellt und gelöst. Er geht von stetigen Funktionen aus, deren Werte aus einem beliebigen lokal-konvexen, topologischen, Hausdorffschen und quasi-kompakten Raum genommen sind. Diese Theorie benutzt eine ganze Menge von schwierigen Sätzen aus der Funktionalanalysis. Leider kann auch diese Theorie den Begriff der Operator-Distribution nicht umfassen, weil der Operatorenraum überhaupt kein topologischer Raum ist.

Es gibt aber eine andere Auffassung der Distributionstheorie, die ich in einer kleinen Broschüre zusammen mit Sikorski dargestellt habe. Diese Auffassung läßt sich so verallgemeinern, daß sie Distributionen mit Werten aus sehr allgemeinen linearen Räumen und auch die Operatoren-Distributionen umfaßt. Außerdem ist diese Theorie sehr einfach und benutzt keine Begriffe aus der Funktionalanalysis.

Jetzt möchte ich noch eine andere Modifikation der Operatorenrechnung erwähnen, die mit der Distributionentheorie nichts zu tun hat. Es handelt sich um eine Operatorenrechnung in einem endlichen Intervall.

Die übliche Operatorenrechnung in irgendwelcher Auffassung beschäftigt sich mit den Funktionen, deren Zeitveränderliche ein unendliches Intervall $0 \leq t < \infty$ durchläuft.

Wenn wir z. B. eine partielle Differentialgleichung betrachten, so betrachten wir sie in einem Halbstreifen, der gelegentlich in einen Quadranten oder eine Halbebene übergehen kann. In vielen Fällen läßt sich aber feststellen, daß die angegebenen Beweise auch für ein endliches Rechteck gelten. Insbesondere erweisen sich die Eindeigkeitssätze für endliche Rechtecke stärker als die analogen Sätze für den Halbstreifen und lassen sich nicht aus den letzten herleiten. Es liegt nahe, eine Operatorenrechnung aufzubauen, die für ein endliches Zeitintervall geeignet ist. Dies gelingt bei Benutzung der algebraischen Methode. Es genügt, solche Brüche einzuführen,



bei denen im Zähler und im Nenner Funktionen aus einem endlichen Intervall stehen. Selbstverständlich soll die Division in diesen Brüchen als die Umkehrung der Faltung betrachtet werden. Die Operatorenrechnung im endlichen Intervall ist der üblichen, in meinem Buch dargestellten, Operatorenrechnung ähnlich. Der Hauptunterschied liegt darin, daß man keinen algebraischen Körper mehr betrachten kann, weil der eingeführte Funktionenring Nullteiler besitzt. Deswegen muß statt des Körpers ein Quotientenring eingeführt werden.

Es ist interessant zu bemerken, daß die Operatorenrechnung im endlichen Intervall sich überhaupt nicht mit der Laplace-Transformation oder mit irgendwelcher anderen linearen Transformation behandeln läßt. Den Beweis, den einzigen Beweis in meinem Vortrag, kann ich hier leicht wiedergeben, weil er sehr kurz ist.

Sei $a(t)$ eine Funktion, die in $0 \leq t \leq T/2$ verschwindet und in $T/2 < t < T$ von Null verschieden ist. Dann verschwindet a^2 , d. h. die Faltung $\int_0^t a(t-\tau) a(\tau) d\tau$, in dem ganzen Intervall $0 \leq t < T$. Gäbe es eine lineare Transformation $\mathfrak{L} a$, die die Faltung in ein übliches Produkt transformiert, so hätten wir $\mathfrak{L}(a^2) = (\mathfrak{L} a)^2 = 0$, und $\mathfrak{L} a = 0$, was natürlich falsch ist. Schluß des Beweises.

Am Ende möchte ich noch einige bisher ungelöste Probleme erwähnen.

1° Es wäre interessant, eine Theorie der operatorischen Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten aufzubauen. In allgemeinen ist das eine schwierige Aufgabe, aber man kann sich auf solche Koeffizienten beschränken, welche die folgende Gestalt haben:

$$a \varphi(\lambda) \quad (a = \text{Operator}, \varphi(\lambda) = \text{numerische Funktion}).$$

Z. B. geht die Tricomi-Gleichung

$$x_{\lambda\lambda} + \lambda x_{tt} = 0$$

in die folgende operatorische Gleichung über:

$$x'' + s^2 \lambda x = f(\lambda).$$

2° Die verallgemeinerte Distributionentheorie, die insbesondere die Operator-Distributionen umfaßt, sollte näher untersucht werden. Insbesondere ist die Fouriersche Transformation, die für die Anwendungen wichtig ist, zu untersuchen.

3° Es wäre interessant, die algebraische Ableitung auch im Falle eines Quotientenringes zu untersuchen. Die bisherige Arbeiten betreffen nur den Fall eines Körpers. Diese Untersuchungen hätten wichtige Konsequenzen auf dem Gebiet der partiellen Differentialgleichungen und führten insbesondere zu neuen starken Eindeutigkeitssätzen.

Literatur

- [1] T. H. Bromwich, Examples of operational methods in mathematical physics, Phil. Mag. **37** (1919), 407.
- [2] J. R. Carson, Heaviside operational calculus, Bell Syst. Tech. Jour. **1** (1922), p. 43.
- [3] G. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin 1937.
- [4] O. Heaviside, Operators in mathematical physics. Proc. Roy. Soc. A. **52** (1893), p. 504.
- [5] J. Mikusiński, Operatorenrechnung, Berlin 1957.
- [6] J. Mikusiński, Sur l'espace linéaire avec dérivation. Studia Math. **16** (1957), p. 113—123.
- [7] J. Mikusiński, Extensions de l'espace linéaire avec dérivation, Studia Math. **16** (1957, p. 156—172).
- [8] J. Mikusiński, Le calcul opérationnel de l'intervalle fini. Studia Math. **15** (1956), p. 225—251.
- [9] J. Mikusiński, Distributions opérationnelles et réunions d'espaces de Banach. Studia Math. (in Vorbereitung).
- [10] J. Mikusiński and R. Sikorski, The elementary theory of distributions (I), Rozprawy Matematyczne **12** (1957).
- [11] L. Schwartz, Théorie des distributions I. Paris 1950.
- [12] L. Schwartz, Théorie des distributions à valeurs vectorielles. Annales de l'Institut Fourier, **7** (1957).
- [13] S. Soboleff, Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques normales. Recueil Math. **1** (1936), p. 39—71.
- [14] E. C. Titchmarsh, The zeros of certain integral functions. Proc. Lond. Math. Soc. **25** (1926), p. 283—302.
- [15] J. Wloka, Über die Anwendung der Operatorenrechnung auf lineare Differential-Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten (1959).

Anschrift: Prof. Dr. J. Mikusiński, Katowice 8, Jaworowa 1, Polen

Über die numerische Integration der Poissonschen Gleichung für quadratisch integrierbare Belegungsfunktionen

Von J. Nitsche

Bei den üblichen Fehlerabschätzungen für das Differenzenverfahren zur Lösung elliptischer Differentialgleichungen hängen die Fehlerschranken i. a. von den Maximalbeträgen der 4. Ableitungen der exakten Lösung des Problems ab. Für eine solche Abschätzung z. B. beim 1. Randwertproblem der Gleichung $\Delta U = f$ (Randwerte 0, Rechtecksbereich) ist jedoch dazu die Hölder-Stetigkeit der 2. Ableitungen von f notwendig, während die Lösung selbst für quadratisch integrierbare Funktionen f definiert ist. — Wie gezeigt wird, ist diese Voraussetzung auch hinreichend für die Konvergenz des Differenzenverfahrens. Die Funktion f muß nur in der Weise durch Gitterwerte $f_{ik}^{(N)}$ ersetzt werden, daß die „interpolierte“ Funktion

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{(N+1)^2} \sum_1^N \sin \pi \frac{m x}{a} \sin \pi \frac{n y}{b} \sin \pi \frac{m i}{N+1} \sin \pi \frac{n k}{N+1} f_{ik}^{(N)}$$

für $N \rightarrow \infty$ im Quadratmittel gegen f konvergiert. Wird die Lösung V_{ik} der Differenzengleichungen

$$(N+1)^2 (\delta_x^2 + \delta_y^2) \cdot v_{ik} = f_{ik}^{(N)}$$

in entsprechender Weise für alle x, y interpoliert ($= \bar{v}(x, y)$), so ergeben sich die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \text{Max } |u - \bar{v}| &\leq C_1 \|f - \bar{f}\| + C_2 h \|f\| \\ \|u_x - \bar{v}_x\|, \quad \|u_y - \bar{v}_y\| &\leq C_1 \|f - \bar{f}\| + C_2 h \|f\| \quad \left(h = \frac{1}{N+1} \right) \\ (\|H\| &= \iint H^2 dx dy), \end{aligned}$$

aus denen sich weiter die Konvergenz mit Einschluß der ersten Ableitungen im Quadratmittel ergibt.

Anschrift: Dr. J. Nitsche, Freiburg i. Br., Hasenweg 44

Über Programmierung und ihre Automation

Von H. Pösch

Sämtliche Vorgänge, gleichgültig welcher Art, in einem programmgesteuerten Rechengesetz lassen sich beschreiben als ein Übertragen und dabei Verändern bzw. Verarbeiten einer festgelegten Informationsmenge.

Die Speichereinheiten sind durch Zahlen adressiert. Nur einige wenige Einheiten, die der Steuerung und dem Rechengesetz zugeordnet sind, haben Buchstaben als Adressen und heißen Register. Jeder Elementarvorgang im Gerät ist bestimmt durch zwei Adressen, der Start- und Zieladresse und einer Funktionsangabe für die Art der Verarbeitung beim Übertragen der Information. Für jeden Elementarvorgang wird ein Text geschrieben, den man Befehl nennt und speichert. Er besteht bei den Einadressengeräten aus dem Operationszeichen und einer Adresse. In dem Operationszeichen ist die Angabe einer zweiten Adresse implizit enthalten.

In der natürlichen Reihenfolge der Adressen werden die in ihnen enthaltenen Befehle ausgeführt, bis ein Befehl den Inhalt des Adressenzählregisters ändert. Dieser Sprungbefehl wird oftmals nur ausgeführt, wenn eine bestimmte Bedingung erfüllt ist, und er bildet so eine Verzweigungsstelle im Programm. Solche Stellen treten im Strukturdiagramm besonders hervor. Im Strukturdiagramm sind Befehle nur Punkte einer Linie.

Ein Programm mit Verzweigungen hat folgendes Aussehen (Bild 1). Ein Programm mit Verzweigungspunkten und Schleifen zeigt dieses Bild (Bild 2). Hier faßt man die Teile zusammen, die Schleifen enthalten, und schafft selbständige Teilprogramme, die in die Bibliothek aufgenommen werden. Man kommt so zu einem Programm mit Verzweigungspunkten und

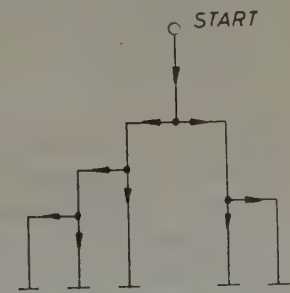


Bild 1. Programm mit Verzweigungen

Bibliotheksprogrammen (Bild 3). Schließlich schafft man ein weiteres Programm, das Verzweigungspunkte und Bibliotheksprogramme enthält und nimmt auch dieses Programm in die Bibliothek auf. Man hat schließlich nur noch ein lineares Programm mit Bibliotheksprogrammen aufzustellen. Darauf arbeitet der Programmierer hin (Bild 4).

Der Speicher reicht im allgemeinen nur für wenige Bibliotheksprogramme aus. Für die Aufnahme weiterer Programme sortiert man Programme in der Bibliothek aus. Dabei tritt die Aufgabe auf, ein Programm nicht nur für eine fest vorgegebene, sondern für eine beliebige Adressenfolge zu schreiben. Hierfür muß das Programm einen Teil der Adressen in den Befehlen aus- und

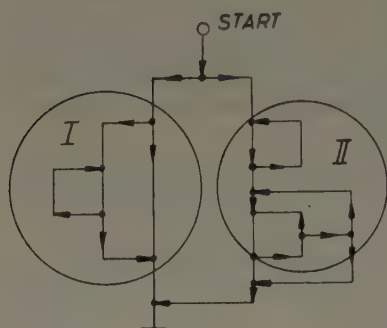


Bild 2. Programm mit Verzweigungen und Schleifen

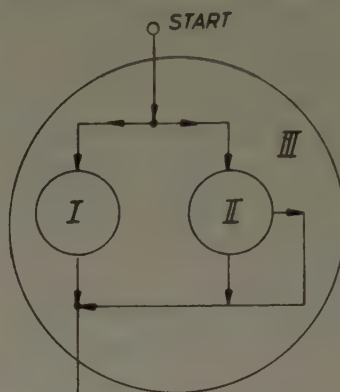


Bild 3. Programm mit Verzweigungen und Bibliotheksprogrammen



Bild 4. Lineares Programm mit Bibliotheksprogrammen

umrechnen, je nachdem von welcher Adresse ab das Programm gespeichert wird. Um diese Anfangsadresse α zu finden, gibt es in den verschiedenen Geräten besondere Befehle.

Für den Univac/Ffm heißt der Befehl Rm . Es ist der einzige Befehl in diesem Rechner, der wieder einen Befehl schafft. Mit R wird ein Sprungbefehl $U\alpha + 1$ in die Adresse m gebracht.

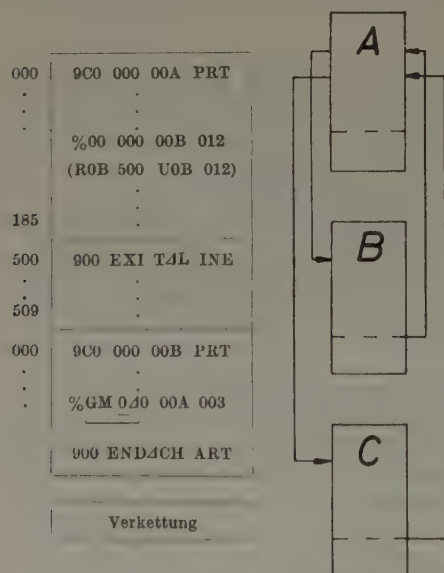


Bild 5. Aufbau eines GP-Programms

Für das Zuse-Gerät Z 22 bewirkt das Zusatzbefehlszeichen F den Übertrag des Wortes im Befehlszählregister in die Kernspeicheradresse 5. Der Befehl $..KG5 + m$ führt zuerst eine Adressenaddition aus.

Für das Siemens-Gerät 2002 gibt es ein Befehlszählregister, das als Indexregister 4 angesprochen werden kann. Mit $i = 4$ wird der Inhalt des Befehlszählregisters zur Adresse x addiert.

Trotz dieser Erleichterung für die Berechnung der Adressen ist es sehr mühevoll, Bibliotheksprogramme zu schreiben, die beliebig gespeichert werden können. Außerdem werden diese Programme länger, da Adressenumrechnungen hinzukommen.

Zur Vereinfachung der Programmierung führt man deshalb relative bzw. symbolische Adressen ein.

Für den Univac haben W. J. Turanski und A. W. Holt, Philadelphia, einen Compiler geschrieben, der „generalized programming“ (GP) heißt und relative Adressen verarbeitet, nachzulesen bei Thuring, Automatische Programmierung (Göller-Verlag).

Die Programmorganisation für das Gerät Z 22 im Recheninstitut von Professor W. Haack an der TU Berlin benutzt symbolische Adressen. Sie stammt von F. R. Güntsch und W. Kuzenko. Herr Kuzenko bearbeitet zur Zeit die Organisation für das Siemensgerät 2002.

Für den GP-Compiler gelten folgende Abmachungen: Eine Aufgabe wird zunächst in beliebig viele Teilaufgaben zerlegt. Für jede Teilaufgabe steht der gesamte Speicher von 1000 Wörtern zur Verfügung (Bild 5). In die Adressen 000 bis höchstens 499 werden die Befehle geschrieben. Von 500 bis höchstens 999 stehen Wörter, die beim Compilieren nicht verändert werden, Zahlen, Kennzeichen, Befehlssteile usw., die im Programm gebraucht werden. Fast alle Adressen werden vom Compiler als relative Adressen behandelt, Ausnahmen bilden:

1. Eine Adresse mit vorangesetztem Punkt.
2. Eine Adresse mit vorangesetztem Komma.
3. Eine Adresse mit vorangesetztem Buchstaben.

Ein Punkt vor der Adresse bedeutet, daß diese fest bleibt, also beim Compilieren nicht verändert wird.

Ein Komma vor der Adresse wird für Arbeitsspeicher benutzt und bedeutet, daß beim Compilieren 20 bzw. 140 hinzugefügt wird, je nachdem ob in festem oder gleitendem Komma programmiert wird. Die Zählung beginnt bei 000.

Eine Adresse mit vorangesetztem Buchstaben bezieht sich auf die relative Adresse eines anderen Teiles.

Das erste Wort des ersten Teiles heißt

9C0 000 00A PRT .

Nach dem letzten Wort eines Programmteiles schreibt man das Wort

900 EXI T A L I N E .

Es gibt an, daß hier die relativen Adressen 500, 501 usw. beginnen. Der zweite Teil wird mit

9C0 000 00B PRT

begonnen, und so fort. Das Ende des Programmes wird angegeben mit

900 END A C H A R T .

Im A-Teil werden im allgemeinen die anderen Teile, wie Unterprogramme, aufgerufen. Dabei kann in irgendeine Adresse der Teilprogramme gesprungen werden. Der Rücksprung wird in die Adresse 500 dieses Teiles notiert. Ein solcher Aufruf hat z. B. die Form:

$\alpha \mid \%00\ 000\ 00B\ 009$.

Der Compiler setzt hierfür

R0B 500 U0B 009

und für die Adressen schließlich die festen Adressen ein.

In der Adresse B500 wird

$- U\alpha + 1$

notiert. Man kann von irgendeinem Teil des Programmes andere Teile aufrufen.

Der Aufruf eines Bibliotheksprogrammes sieht wie folgt aus: Nach dem Prozentzeichen folgen vier Zeichen, die den Namen des Bibliotheksprogrammes angeben. Also alle Bibliotheksprogramme haben einen Vier-Buchstaben-Namen. Variable Größen werden in einem Verkettungsblock festgelegt (Bild 5). Es handelt sich bei ihnen um Adressen, Konstanten, Befehlssteile oder ähnliches. Der Compiler liest zunächst das gesamte Programm ein, sucht die Bibliotheksprogramme, die auf einem Magnetband, alphabetisch geordnet, geschrieben sind, notiert alle Programme auf ein hierfür bereitstehendes Band und beginnt anschließend mit der Compilierung.

Wird ein solches Programm geändert, indem irgendwo Befehle zwischengefügt werden, so haben nur die nachstehenden Befehle des betreffenden Teiles ihre Adressen geändert. Weitere hierdurch bedingte Änderungen beschränken sich fast immer nur auf diesen Teil. Erwähnt sei hier, daß jedes Programm so geschrieben ist, daß es als Bibliotheksprogramm aufgenommen werden kann.

Das Organisationsprogramm für die Z 22 in Berlin kann als eine Erweiterung des Leseprogramms angesehen werden. Man programmiert in festen und symbolischen Adressen (Bild 6). Die symbolischen Adressen erster Art sind in Klammern gesetzte Nummern. Es handelt sich hier um die Beziehungen innerhalb eines Programmes. Die symbolischen Adressen werden hinter das Operationszeichen gesetzt und allgemein mit k_a bezeichnet (Adresse). Jede symbolische Adresse muß einmal vor dem Bezugswort stehen.

Hier heißt diese Adresse k_v (vor dem Bezugswort). Das Organisationsprogramm muß zwischen k_a und k_v unterscheiden. Für k_a wird bei der Aufstellung des Programmes durch das Organisationsprogramm eine feste Adresse gesetzt, die von k_v geliefert wird. Der Austausch der symbolischen Adressen erfolgt über eine Liste, die nur beim Einlesen des Programmes gebraucht wird. Denn während dieser Zeit wird das Programm zu einem Geräteprogramm umgebildet.

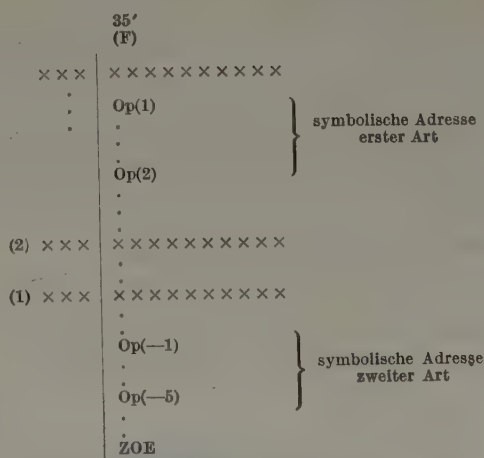


Bild 6. Programmorganisation für symbolische Adressen für die Z 22 in Berlin

Die zweite Art symbolischer Adressen hat vor der Nummer ein negatives Vorzeichen. Auch diese Numerierung beginnt mit 1 fortlaufend. Diese Adressen beziehen sich auf Zahlenlisten und auf andere Programme, im allgemeinen Bibliotheksprogramme. Jedes Bibliotheksprogramm hat als erstes Zeichen die Nummer des Programmes. Dann folgt das Zeichen (F). Die Zuordnung der Zahlenlisten und der Bibliotheksprogramme zu den symbolischen Adressen zweiter Art erfolgt in dem Zuordnungsschema (Bild 7), das als erstes in das Gerät eingelesen wird. Das Anfangszeichen dieses Schemas heißt (Z). Dann folgt eine Zahl, die die Listenlänge angibt, und schließlich die Nummern aller Programme und Zahlenlisten und ihrer Zuordnungen. Die Angaben für jedes Programm werden durch Schrägstriche eingefaßt. Nach einem Schrägstrich folgt die Nummer des nächsten Programmes und, fortlaufend durch Kommata voneinander getrennt, die Nummern der in diesem Programm aufgerufenen Bibliotheksprogramme oder Listen. In dem Zuordnungsschema müssen die Nummern einzeln aufgeführt werden, da das Organisationsprogramm keinen Unterschied zwischen Programmen und Listen kennt. Das Schlußzeichen des Zuordnungsschemas ist ein Doppelpunkt und ersetzt den letzten Schrägstrich.

$$\begin{array}{c} (Z) \\ 8/35, 7, 4/7, 13/4: \\ (-1) (-2) \end{array}$$

Bild 7. Beispiel für ein Zuordnungsschema. Listenlänge = 8

Für den Siemensrechner 2002 sollen die Erfahrungen mit dem Organisationsprogramm der Z 22 ausgewertet und erweitert werden. Der Verfasser hat folgende Pläne: Die Zuordnungen sämtlicher Bibliotheksprogramme werden im ersten Block auf einem Magnetbande, dem Bibliotheksband, angegeben, d. h. zu jedem Programm werden die zugehörigen Unterprogramme notiert. Dann stehen alle Bibliotheksprogramme den Nummern nach geordnet auf dem Band. Ein Schlußzeichen gibt das Ende der Bibliothek an.

Wird eine Aufgabe programmiert, so stehen im Zuordnungsschema nur die vom Hauptprogramm unmittelbar aufgerufenen Bibliotheksprogramme. Sollen in einem Bibliotheksprogramm, das aufgerufen wird, andere Bibliotheksprogramme benutzt werden als auf dem Magnetband im Zuordnungsbereich notiert sind, so wird die gewünschte Zuordnung im Zuordnungsschema hinzugefügt. Vom Leseprogramm wird zuerst das Zuordnungsschema eingelesen und anschließend der erste Block vom Bibliotheksband. Dann wird das Zuordnungsschema vervollständigt. Zum Schluß wird das Programm und alle zugehörigen Bibliotheksprogramme auf den Trommelspeicher übertragen. Das Leseprogramm beginnt jetzt mit dem Umsetzen der Befehle in echte Gerätebefehle.

Die symbolische Adresse erster Art hat vor der Nummer einen Stern. Die symbolische Adresse zweiter Art wird von zwei Sternen eingefaßt. Man kann sich im Hauptprogramm auch auf die symbolischen Adressen im Bibliotheksprogramm beziehen. Die durch das Leseprogramm bestimmte Adresse kann überdies noch durch die Angabe einer Zahl verändert werden (Kuzenko). Die Verwendung symbolischer Adressen läßt Ersatz- und Zusatzbefehle besonderer Art zu. Für diese Ersatzbefehle schiebt das Leseprogramm eine Befehlsfolge ein. Die Befehlsfolge hängt ab von dem Zeichen, das dem Ersatzbefehlszeichen zugeordnet ist. Der Ersatzbefehl ist ein Zwischending zwischen einem Befehl und einem Bibliotheksprogramm. Er kann selbst auch Bibliotheksprogramme enthalten und schließlich Interpretationsprogramme einfügen, bzw. Interpretationsprogramme des Leseprogrammes anrufen.

Soweit der bis heute geplante Aufbau des Leseprogrammes für den Siemensrechner 2002.

Anschrift: Priv.-Doz. Dr.-Ing. H. Pösch, Hahn-Meitner-Institut für Kernforschung, Sektor Mathematik, Berlin-Wannsee, Glienicker Straße

Ambigeneous stochastic processes^{*)}

Von A. Ramakrishnan

We discuss in this paper a new type of stochastic process involving "back-scattering" with respect to t , a feature which disturbs the otherwise Markovian character of the process and consider some of its applications. We call such processes "ambigeneous". Particular reference will be made to the interpretation of paths resulting in such processes which are analogous to Feynman paths.

Paths of single particles (involving back-scattering) and cases involving production of particles (e. g. by fission) are considered separately.

^{*)} Verf. war leider verhindert, den angemeldeten Vortrag auf der Tagung zu halten.

Single particle processes

Let us consider a process in which the state of a particle is characterised by its velocity which can take positive or negative values as the one dimensional parameter x . The distance travelled by the particle is varied. If the particle is assumed to move in the direction of $+x$ when the velocity is positive, it is necessarily implied that it moves on the direction of $-x$ when the velocity is negative. If we choose time as the one dimensional parameter with respect to which the process can be supposed to develop, transition probabilities for the velocity can be defined per unit time and *Markovian* properties can be ascribed to the stochastic process unfolding with t . But if x is chosen as the parameter of the process, the concept of development with x breaks down since the velocity can take positive and negative values.

We define $R_1(v'|v) dv' \Delta$ and $R_2(v'|v) dv' \Delta$ as transition probabilities for a particle in a state characterised by velocity v positive and negative respectively to the state characterised by any velocity lying between v' and $v' + dv'$ when it moves to $x + \Delta$, $x - \Delta$ respectively. We confine our attention to the case in which $R_1(v'_1|v_1) \equiv R_2(v'_2|v_2)$ if $v'_2 = -v'_1$ and $v_2 = -v_1$.

Two distinct methods of studying the process are possible.

(1) The method of π -functions

Let us define

$\Pi^R(v, x, t|v_0)$ = probability that the particle is at x at time t travelling with a velocity v (positive), the initial velocity being positive.

and

$\Pi^L(v, x, t|v_0)$ = probability that there is a particle at x at time t , with velocity v (negative), the initial velocity being positive.

Then by arguments familiar in stochastic theory, we can write:

$$\frac{\partial \Pi^R}{\partial t} = -\Pi^R \int_{v'} \varrho_1(v'|v) dv' + \int_{v'} \Pi^L \varrho_2(v|v') dv' + \beta(v) \frac{\partial \Pi^R}{\partial x} \dots \dots \dots (1)$$

$$\frac{\partial \Pi^L}{\partial t} = -\Pi^L \int_{v'} \varrho_2(v'|v) dv' + \int_{v'} \Pi^R \varrho_1(v|v') dv' + \beta(v) \frac{\partial \Pi^L}{\partial x} \dots \dots \dots (2)$$

$$\Pi^R = \delta(x); \quad \Pi^L = 0 \quad \text{at } t=0; \quad \text{where } \frac{1}{v} \varrho(v'|v) = R(v'|v) \dots \dots \dots (3).$$

Choosing a as the probability of reversal in unit length, we deduce

$$\frac{\partial \Pi^R}{\partial t} = -v \frac{\partial \Pi^R}{\partial x} - a \Pi^R + a \Pi^L; \quad \frac{\partial \Pi^L}{\partial t} = v \frac{\partial \Pi^L}{\partial x} + a \Pi^R - a \Pi^L \dots \dots \dots (4).$$

Putting $v = 1$, Π^R can also be interpreted

i) as the distribution of the random variable:

(sum of odd segments — sum of even segments)

when points are distributed at random on a line segment of length l .

ii) By identifying x as an integral of a random function, and expression for Π^R in these cases are given.

The difficulties in passing to the limit when $t \rightarrow \infty$ are obviated by using a method recently suggested by Bellman et al. by switching off the back scattering probabilities outside an interval $(0, x)$ and considering the states only at the boundaries 0 and x . Velocity-dependent probabilities of emergence at 0 and x over all times are defined and the equations they satisfy are derived. In the case when only one velocity is allowed for the particle, it is shown that these probabilities of emergence at 0 and x are $\frac{ax}{1+ax}$, $\frac{1}{1+ax}$ respectively.

By analysing in greater detail the passage of the particle at some X ($0 < X < x$), it is proved that

$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q(x) q(x-X) \{p(X) p(x-X)\}^n \dots \dots \dots (5).$$

An integral expansion is also possible for $q(x)$ which has a direct relation to *Feynman* paths.

(2) The method of f -functions

Alternately we define $f^R(x, t)$, $f^L(x, t)$ as the product density, functions for a particle to cross x to the right or left respectively between time t and $t + dt$. We get the differential equations (b = backward scattering probability per unit length).

$$\frac{\partial f^R}{\partial x} = b f^L - b f^R - \frac{1}{v} \frac{\partial f^R}{\partial t} \quad \dots \dots \dots (6)$$

$$\frac{\partial f^L}{\partial x} = b f^L - b f^R + \frac{1}{v} \frac{\partial f^R}{\partial t} \quad \dots \dots \dots (7)$$

with the initial condition that we put in the particle at $x = 0$ at $t = 0$, moving to the right. The medium extends from $x = 0$ to $x = l$. Taking Laplace transforms of f^R and f^L , to be p^R and p^L , we can write (6) and (7) as a vector matrix equation

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} p^R(s; x) \\ p^L(s; x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b - \frac{s}{v} & b \\ -b & b + \frac{s}{v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^R(s; x) \\ p^L(s; x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{v} f^R(x; 0) \\ -\frac{1}{v} f^L(x; 0) \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots (8).$$

Feeding in the boundary conditions that at $t = 0$ $f(x, t)$ has a value only at $x = 0$ and $p^L(s; l) = 0$; $p^L(s, 0)$ is calculated

$$p^L(s; 0) = \frac{b}{\left(b + \frac{s}{v}\right) \sinh(m l) + m \cosh(m l)} \quad \dots \dots \dots (9).$$

Inverting the above, we obtain the $f^L(0, t)$ function, integrating which over time yields the probability for the particle to emerge at $x = 0$ in time (0 to t). Putting $s = 0$ in the above and solving for $p^L(0; 0)$ and $p^R(0; l)$ we get the probability for the particle to emerge at $x = 0$ and $x = l$, in infinite time as $\frac{b l}{1 + b l}$ and $\frac{1}{1 + b l}$ as obtained earlier.

Many particle process

We shall now consider processes involving back-scattering, absorption and production of particles. In particular we shall take the case when it is assumed that when two particles are produced, one moves forward and the other backward with equal velocities. Let a be the probability of fission and c the probability of absorption per unit length. As developed earlier, we may define product densities $f^R(x, t)$ and $f^L(x, t)$ in the usual way as the mean number crossing x to the right and to the left respectively at time t .

$f^R(x, t)$ and $f^L(x, t)$ satisfy

$$\frac{\partial f^R}{\partial x} = a f^L - c f^R - \frac{1}{v} \frac{\partial f^R}{\partial t} \quad \dots \dots \dots (10),$$

$$\frac{\partial f^L}{\partial x} = -a f^R + c f^L + \frac{1}{v} \frac{\partial f^L}{\partial t} \quad \dots \dots \dots (11).$$

As before we obtain a vector matrix equation for the Laplace transforms. An expression for the mean number of particles that emerge from either end, over all time are found and corresponding time-dependent expressions are calculated.

A comprehensive paper on this subject is under preparation in collaboration with R. Vasudevan and R. Rajagopal.

References

R. Bellmann et al, Journal of Math. and Mech. 7, (1958), 149.

Anschrift: Prof. Dr. Alladi Ramakrishnan, University of Madras, Dept. of Physics, A. C. College Buildings, Madras-25, India

Vereinfachung der Synthese von gewissen Reihenparallel-schaltungen durch Aufspalten in Teilprobleme

Von *Hans Rohleder*

Eine Arbeit über diesen Gegenstand erscheint in einem der nächsten Hefte dieser Zeitschrift.

Graphische Näherungslösung einiger nichtlinearer Differentialgleichungen

Von *W. Romberg*

Die beschriebene Methode kann besonders zur angenäherten Integration von nichtlinearen Differentialgleichungen n -ter Ordnung der Form

$$L_n(u) = f(t) + U(u) \quad \dots \quad (1)$$

benutzt werden, wobei L_n ein linearer Differentialausdruck mit (meist) konstanten Koeffizienten ist. Gegeben seien die Anfangswerte für $t = 0$, $u(0)$, $u'(0)$, \dots , $u^{(n-1)}(0)$.

Das underivierte Glied aus L_n nehmen wir in U mit hinein, $U - a_n u = V(u)$, ersetzen in den übrigen Gliedern die Ableitungen durch Differenzenausdrücke höchstens n -ter Ordnung (zur Vermeidung fremder Lösungen) und lösen diese Differenzengleichung graphisch. Sie ist dann etwa von der Form

$$(u_{k+1} - u_k) \cdot Q = \sum (u_{k-n+j+1} - u_{k-n+j}) P_j + h^n V(u_k) + h^n f(t_k) \quad \dots \quad (2).$$

Welche der Differenzenausdrücke man am besten beim Übergang von (1) nach (2) benutzt, hängt noch von den Koeffizienten des L_n ab, möglichst sei $|Q|$ groß und die $|P_j|$ klein, um die Zeichenfehler zu verkleinern. Sie bewirken, daß die Methode im Sinne der Mathematik nicht konvergiert: Mit $h \rightarrow 0$ verschwindet der Ersatzfehler, aber wünscht man, (1) über ein festes Intervall zu integrieren, so wächst die erforderliche Schrittzahl mit abnehmenden h und vergrößert die Auswirkung der Zeichenfehler. Die Diskussion der Fehler und die Berechnung des optimalen h wurde für $n = 1$ beschrieben (in „Vorläufiger Bericht“, Fysisk Institutt, NTH Trondheim. Dez. 1958), zusammen mit Formeln für den Übergang von (1) nach (2) bei $n = 2$ bis $n = 6$.

Die graphische Lösung von (2): Zunächst Wahl der Schrittgröße h . Da die Ausdrücke für das optimale h unbequem werden, ist es besser, h so klein zu wählen, daß der wesentliche Verlauf von V und f mit erfaßt wird und daß möglichst $|P_j| \leq 1$, aber $|Q| \geq 1$ wird. Aber zu kleine h würden wieder zu viel Zeichenarbeit erfordern. Man benötigt $n - 1$ Startwerte. Ersetzt man in den gegebenen Anfangswerten ebenfalls die $u^{(j)}$ durch Differenzen, so erhält man zusammen mit (2) für $k = 0$, n lineare Gleichungen zur Berechnung der Startwerte.

Man zeichnet $h^n V$ als Funktion von u in einem rechtwinkligen Achsenkreuz. Auf der u -Achse trägt man die Punkte $f_k = -h^n f(k h)$ ein. Seien nun die Näherungswerte bis u_k gefunden und u_{k+1} gesucht.

a) $h^n V(u_k)$ an der Kurve ablesen: Punkt A_k ;

b) durch A_k parallel zur Abszisse bis zur Abszisse f_k : Punkt B_k ;

c) durch B_k unter 45° mit der Abszisse einen Strahl bis zum Schnitt mit der Ordinatenachse:

Punkt C_k ;

d) durch C_k parallel zur Abszisse bis zur Abszisse u_{k-n+1} : Punkt $D_{k,1}$;

e) durch $D_{k,j}$ den Strahl bis zur Abszisse $u_{k-n+j+1}$; der Strahl bilde mit der Abszisse den

Winkel p_j , so daß $\tan p_j = P_j$: Punkt $D_{k,j+1}$ ($j = 1, 2, n - 1$);

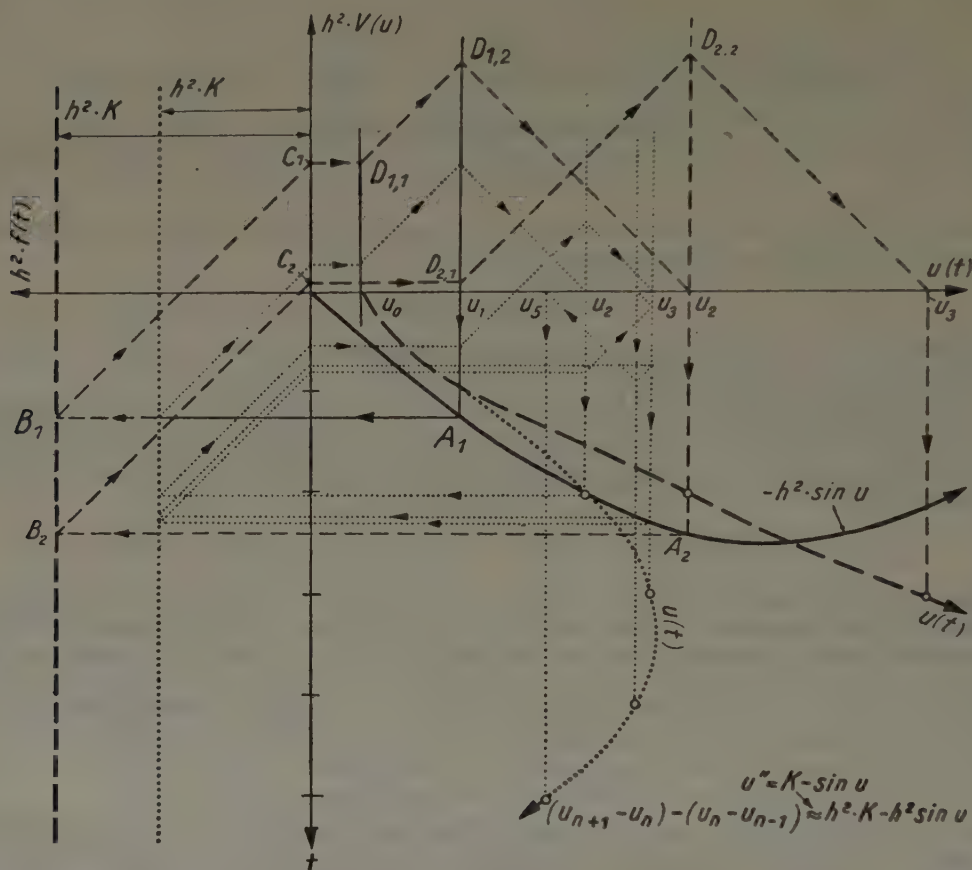
f) durch $D_{k,n}$ den Strahl, der den Winkel q mit der negativen Ordinatenachse bildet, so daß $\tan q = Q$. Der Strahl schneidet die Abszisse in u_{k+1} .

Benutzt man die negative Ordinatenachse als t -Achse, so kann man die Näherungspunkte einzeichnen. Die Kurve durch sie ist die Näherungskurve an die Lösung $u(t)$. (Drehung der Zeichnung um 90°).

Die Begrenzung der Anwendbarkeit der Methode liegt in der Zeichengenauigkeit in ihrer Auswirkung auf den Lösungsverlauf. Ist dieser stark von den Zeichenfehlern abhängig, dann wird auch das durch (1) beschriebene technische System empfindlich gegenüber Störungen sein.

Die Methode läßt sich leicht auf allgemeinere Differentialgleichungen erweitern. Sind einige der a_i in L noch Funktionen von t , so sind die P_i und Q bei jedem Schritte entsprechend zu verändern. Ist V auch Funktion von t , so ist $V(u)$ für $t = kh$ zu zeichnen. Auch ein Glied $g(u')$ in (1) kann leicht berücksichtigt werden, ebenso Funktionszusammenhänge, die sich aus Nomo-grammen ergeben.

Praktisch erprobt wurde die Methode für die Dgl. $u'' = K - \sin u$. Hier ist $P = Q = 1$, so daß nur Geraden zu zeichnen sind, die den Winkel 45° mit den Achsen bilden.



Die Figur zeigt die Konstruktion von u_2 und u_3 für zwei Werte von K : größeres K gestrichelt, kleineres punktiert. Die Abhängigkeit (Stabilität) der Lösungskurven von K und von den $u(0)$, $u'(0)$ trat deutlich hervor (siehe A. Johannesen, Elektroteknisk Tidsskrift, 72, 255—265 (1959)).

Anschrift: Dr. W. Romberg, Trondheim (Norwegen), Norwegische Technische Hochschule

Fehlerabschätzungen für eine Klasse von Iterationsverfahren

Von J. Schmidt

Gewisse iterative Näherungsverfahren zur Lösung der Fixpunktgleichung

$$x = Tx \quad \dots \quad (F)$$

mit einem im allgemeinen nichtlinearen Operator T in einem Raum \mathfrak{E} lassen sich einheitlich beschreiben (siehe [6]). Man geht von einer Folge von Näherungsoperatoren T_n aus, die durch das betreffende Verfahren festgelegt werden und in der Regel einfacher als T sind, und bestimmt die Elemente x_n einer Näherungsfolge für die Lösung von (F) aus den als eindeutig lösbar vorausgesetzten Gleichungen

$$x_n = T_n x_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (N).$$

Zum Beispiel kann man die Operatoren T_n für das gewöhnliche Iterationsverfahren durch

$$T_n y = T x_{n-1}, \quad y \text{ aus } \mathfrak{E}, \quad n = 1, 2, \dots$$

und für das *Newtonsche* Verfahren durch

$$T_n y = T x_{n-1} + T'_{(x_{n-1})} (y - x_{n-1}), \quad y \text{ aus } \mathfrak{E}, \quad n = 1, 2, \dots$$

erklären.

Für solche Iterationsverfahren läßt sich ein Ergebnis angeben, das in seiner Anlage den bekannten Sätzen über das gewöhnliche Iterationsverfahren $x_n = T x_{n-1}$ zur Lösung von (F) entspricht und diese verallgemeinert (siehe [2], [3], [4], [5]).

Der Raum \mathfrak{E} sei ein Linearsystem, das durch Elemente einer teilweise geordneten Menge \mathfrak{v} normiert ist. Mit Hilfe eines Konvergenzbegriffes in \mathfrak{v} werden in \mathfrak{E} konvergente Folgen erklärt, und \mathfrak{E} sei im Sinne dieser Konvergenz vollständig. Es erweist sich als zweckmäßig, als Normenraum \mathfrak{v} speziell einen archimedischen Vektorverband und als Konvergenzbegriff in diesem die gleichmäßige Konvergenz zu wählen (diese Begriffe sind z. B. in [1] erklärt).

An die Operatoren T_n und $T - T_n$ in \mathfrak{E} sind *Lipschitzbedingungen* zu stellen, die mit Hilfe linearer, positiver Operatoren in \mathfrak{v} angegeben werden. Wichtig ist, daß solche *Lipschitzoperatoren* in \mathfrak{v} bezüglich der gleichmäßigen Konvergenz stetig sind.

Es läßt sich nun folgender Satz beweisen.

Satz: Auf einer Teilmenge \mathfrak{S} des eben beschriebenen Linearsystems \mathfrak{E} sei der Operator T und auf \mathfrak{E} seien die Näherungsoperatoren T_n erklärt, und es gelten folgende Bedingungen:

- a) $\|T_n y - T_n z\| \leq M \|y - z\|$ für y, z aus \mathfrak{E} , $n = 1, 2, \dots$; M *Lipschitzoperator*
- b) $\|(T - T_n) y - (T - T_n) z\| \leq K \|y - z\|$ für y, z aus \mathfrak{S} , $n = 1, 2, \dots$; K *Lipschitzoperator*

c) für jedes Element a aus \mathfrak{v} konvergiert die Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} M^v a$ gleichmäßig. (Dann existiert der Operator $(I - M)^{-1}$ in ganz \mathfrak{v} .)

d) ebenso konvergiert $\sum_{v=0}^{\infty} P^v a$ mit $P = (I - M)^{-1} K$ für jedes Element a aus \mathfrak{v} gleichmäßig

e) es gilt die Approximationsbedingung $T_n x_{n-1} = T x_{n-1}$; $n = 1, 2, \dots$

f) ausgehend von einem geeigneten Element x_0 aus \mathfrak{S} sei die Kugel $\mathfrak{D} = \{y \text{ aus } \mathfrak{E}; \|y - x_1\| \leq f, f = P(I - P)^{-1} \|x_1 - x_0\|\}$ in \mathfrak{S} enthalten.

Dann konvergiert die Folge $\{x_n\}$ der jetzt in \mathfrak{E} eindeutigen Lösungen von (N) gleichmäßig gegen ein Element x aus \mathfrak{E} , das gleichfalls in \mathfrak{D} liegt und die einzige Lösung von (F) in \mathfrak{S} ist. Insbesondere gilt für x_1 also die Fehlerabschätzung $\|x - x_1\| \leq f$.

Anmerkung: Sind die Operatoren T_n linear oder bis auf additive Konstanten linear, so bedeutet die Bedingung a) gegenüber b) bei wichtigen Anwendungen keine schärfere Forderung. Im anderen Falle bleibt die Aussage des Satzes erhalten, wenn man etwa an Stelle von a) die Existenz und die gleichmäßige *Lipschitzbeschränktheit* der T_n nur in \mathfrak{S} , die Abgeschlossenheit von \mathfrak{S} verlangt und weiterhin fordert, daß die Näherungsoperatoren \mathfrak{S} in sich abbilden.

Der Satz kann z. B. auf das *Newtonsche* Verfahren angewendet werden, wenn man dieses als vereinfachtes Verfahren auffaßt. Gegenüber dem bekannten Weg über das gewöhnliche Iterationsverfahren ergeben sich dabei erhebliche Erleichterungen für die Fehlerabschätzung. Als gewöhnliche Iteration geschrieben, hat man eine *Lipschitzbedingung* für den Operator

$$(I - T'_{(x_0)})^{-1} (T - T'_{(x_0)})$$

aufzustellen, während der obige Satz *Lipschitzbedingungen* für die Operatoren

$$T'_{(x_0)} \quad \text{und} \quad T - T'_{(x_0)}$$

erfordert. Wenn man etwa die *Lipschitzoperatoren* mit Hilfe des Mittelwertsatzes ermittelt, vermeidet man bei Benutzung des obigen Satzes die Berechnung eines inversen Operators in \mathfrak{E} . Diese Aufgabe wird in den im allgemeinen einfacheren Normenraum \mathfrak{v} verlegt, und man hat dort dafür den Operator P zu ermitteln. Bei der Normierung durch reelle Zahlen ist nur eine Division von zwei Zahlen auszuführen.

Eine ausführlichere Darstellung mit Beispielen aus der praktischen Analysis erscheint in Kürze in dieser Zeitschrift.

Literatur

- [1] G. Birkhoff, *Lattice Theory*. New York 1948.
- [2] L. Collatz, *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*. 2. Aufl. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1955.
- [3] L. Collatz, Einige Anwendungen funktionalanalytischer Methoden in der praktischen Analysis. *Z. angew. Math. Phys.* **4** (1953), S. 327—357.
- [4] J. Schröder, Das Iterationsverfahren bei allgemeinerem Abstandsbegriff. *Math. Zeitschr.* **66** (1956), S. 111—116.
- [5] J. Schröder, Neue Fehlerabschätzungen für verschiedene Iterationsverfahren. *Z. angew. Math. Mech.* **36** (1956), S. 168—181.
- [6] J. Warga, On a Class of Iterative Procedures for Solving Normal Systems of Ordinary Differential Equations. *Journ. Math. Phys.* **31** (1952), S. 223—243.

Anschrift: Dr. J. Schmidt, Dresden A 27, Liebigstr. 24

Fehlerabschätzung mit Fixpunktsätzen

Von *Johann Schröder*

Für viele Probleme der praktischen Analysis (z. B. Gleichungssysteme, Integralgleichungen, Differentialgleichungen) lassen sich mit Hilfe von Fixpunktsätzen Fehlerabschätzungen herleiten. Diese enthalten als Spezialfälle u. a. eine Reihe bekannter Abschätzungen. Dazu gehören diejenigen, welche man im Zusammenhang mit Iterationsverfahren in einem metrischen oder verallgemeinerten metrischen Raum beweisen kann, sowie die Einschließungsaussagen bei Iterationsverfahren mit monotonem Operator. Diese Abschätzungen werden dabei verallgemeinert und verschärft.

Die Ergebnisse enthalten ferner als praktisch besonders wichtigen Spezialfall Abschätzungen, welche den Defekt benutzen, der beim Einsetzen einer Näherungslösung in die gegebene Gleichung entsteht. Für bestimmte Typen von Differentialgleichungsaufgaben läßt sich ein systematisches Verfahren angeben, mit dem man eine Näherungslösung erhalten und deren Fehler vom Defekt ausgehend abschätzen kann. Dieses Verfahren ist zum Einsatz von Rechenanlagen geeignet.

Für den Fall linearer Gleichungssysteme sind die Ergebnisse im *Arch. Rat. Mech. Anal.* **3** ausführlicher dargestellt (Fehlerabschätzungen bei linearen Gleichungssystemen mit dem *Brouwer'schen* Fixpunktsatz). Eine genauere Beschreibung der genannten Abschätzungen bei Differentialgleichungen erscheint in Kürze.

Anschrift: Priv.-Doz. Dr. J. Schröder, Reinbek (Bez. Hamburg), Kirchenallee 10

Über die Approximation mit Bernstein-Polynomen

Von *P. C. Sikkema*

Wenn man mit $\omega(\delta)$ den Stetigkeitsmodul einer auf dem Segment $[0, 1]$ stetigen Funktion $f(x)$ bezeichnet und $B_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) das zu $f(x)$ gehörige *Bernstein-Polynom* n -ter Ordnung ist, so gilt Folgendes:

I. Die von Lorentz¹⁾ bewiesene Beziehung

$$1 \leq \kappa \leq 1 \frac{1}{4},$$

der die untere Grenze κ der Menge aller Konstanten K genügt, für die die Fehlerabschätzungen

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - B_n(x)| \leq K \omega\left(n^{-\frac{1}{2}}\right) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

für jede auf $[0, 1]$ stetige Funktion $f(x)$ gelten, läßt sich verschärfen zu

$$1 \leq \kappa \leq 1,093785.$$

¹⁾ G. G. Lorentz, *Bernstein-Polynomials*, Toronto 1953.

II. In der von Popoviciu²⁾ erhaltenen, für jede auf $[0, 1]$ stetige und nicht-konstante Funktion $f(x)$ gültigen Ungleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - B_n(x)|}{\omega\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}\pi}$$

kann man das zweite Glied ersetzen durch

$$1 + \frac{1}{e^2 \sqrt{2}\pi}.$$

Ein Beweis dieser Behauptungen wird in der Zeitschrift „Numerische Mathematik“ erscheinen (Bd. 1 (1959)).

Anschrift: Dr. P. C. Sikkema, Rijswijk (Post Delft), Van Hardenbroeklaan 20, Niederlande

²⁾ T. Popoviciu, Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur. *Mathematica (Cluj)* 10 (1935), S. 49–54.

Einige praktische Fragen des Linear Programming¹⁾

Von P. Stahlknecht

Einige betriebswirtschaftliche Optimalprobleme lassen sich auf die Gestalt

$$\begin{aligned} c &= c_0 + \sum_{k=1}^n c_k x_k = \min!, \\ x_i &= u_{i0} + \sum_{k=1}^n u_{ik} x_k \geq 0 \quad (i = n+1, \dots, m), \\ 0 &\leq x_k \leq r_k \quad (k = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

bringen, wobei c_0, c_k, u_{i0}, u_{ik} gegeben, die oberen Schranken r_k für die Nicht-Basisvariablen²⁾ aber veränderlich sind. Die optimalen Lösungen sollen als Funktionen dieser Schranken aufgestellt werden. Die Aufgabe gehört zum Gebiet des Parametric Linear Programming³⁾.

In vielen Fällen existiert eine „Bilanzgleichung“

$$1 = \sum_{k=1}^n h_k x_k,$$

so daß es nahe liegt, sie als Leitgleichung aufzufassen und das Problem nach entsprechenden Umformungen mit der Methode der Leitveränderlichen von Beale zu behandeln. Für praktische Belange besitzt diese Rechnung zu wenig Übersichtlichkeit. Zweckmäßiger ist, das Problem in die Gestalt

$$\begin{aligned} c &= a_0 + \sum a_k r_k + \sum b_t y_t = \min!, \\ y_s &= v_{s0} + \sum v_{sk} r_k + \sum w_{st} y_t \geq 0; \quad y_t \geq 0 \end{aligned}$$

zu bringen (die Menge der y_s, y_t setzt sich zusammen aus den x_i, x_k und Zusatzvariablen $x'_k = r_k - x_k$) und die Duale Simplex-Methode von Lemke anzuwenden. Dazu muß $b_t \geq 0$ sein für alle t , was sich leicht erreichen läßt. Alle Zwischen- und Endergebnisse haben die Form

$$y_s = v_{s0} + \sum v_{sk} r_k; \quad y_t = 0.$$

Die Schranken r_k bestimmen für jede Lösung den Gültigkeitsbereich, dessen genaue Kenntnis selten verlangt wird. Dagegen kommen sie in den beim Austausch von Variablen zu bildenden Quotienten nicht vor. Treten neue Bedingungen auf, braucht nicht von vorn begonnen zu werden. Die Anwendung der Simplex-Methode von Dantzig erweist sich als unzweckmäßig.

¹⁾ Verf. war leider verhindert, den angemeldeten Vortrag auf der Tagung zu halten.

²⁾ Bezeichnungen nach S. Vajda, *The theory of games and linear programming*; New York, London 1956, wo auch die hier erwähnten Lösungsmethoden beschrieben werden.

³⁾ Siehe etwa in: S. J. Gass, *Linear Programming*; New York, Toronto, London 1959.

Von Vorteil kann die gleichzeitige Betrachtung des dualen Optimalproblems sein. Bei Mischungsproblemen sind n Komponenten $x_k \geq 0$ unter Einhaltung gewisser Nebenbedingungen so zu mischen, daß die Gesamtkosten möglichst niedrig ausfallen. Die Aufgabe lautet:

$$p = \sum_{k=1}^n p_k x_k = \min!, \quad \sum_{k=1}^n x_k = 1,$$

$$\sum_{k=1}^n q_{ik} x_k \leq \bar{q}_i \quad (i = 1, \dots, m); \quad x_k \leq r_k \quad (k = N + 1, \dots, n).$$

Im dualen Problem entspricht jeder Variablen x_k mit $k > N$ eine Bedingung

$$z - \sum_{i=1}^m q_{ik} z_i - z'_k \leq p_k$$

mit $z_i \geq 0, z'_k \geq 0$. Im Gültigkeitsbereich irgendeiner optimalen Lösung können die z_i sowie z von vornherein berechnet werden. Nach einem Dualitätssatz⁴⁾ darf die Komponente x_k mit $k > N$ nur eingesetzt werden, wenn

$$z - \sum_{i=1}^m q_{ik} z_i \geq p_k$$

gilt. Dann ist $-z'_k$ der Koeffizient von r_k in p .

Anschrift: Dr. P. Stahlknecht, Leipzig S 3, Brandvorwerkstr. 85

⁴⁾ Siehe etwa A. J. Goldman, A. W. Tucker, Theory of linear programming; Ann. Math. Studies 38, 53—97; 1956.

Anwendung des Äquivalenzsatzes von P. Lax auf inhomogene Probleme

Von Hans J. Stetter

Der *Laxsche* Äquivalenzsatz besagt, daß bei der numerischen Behandlung von Anfangswert-Problemen vom Typ

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} u(t) - A(t) u(t) &= 0, \\ u(0) &= u_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

(partielle Differentialgl., Integro-Differentialgl. u. ä.; der Operator A enthält Operationen bezüglich der nicht explizit angeführten „Ortsvariablen“) durch Differenzenansätze „Konsistenz“ und „Stabilität“ der Differenzengleichungen eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Lösungen der Differenzengleichungen gegen die Lösung des infinitesimalen Problems sind. Außerdem ergibt sich beim Beweis des Satzes, daß bei solchen Problemen die Konvergenzordnung im Großen genau um eine Potenz des Zeitschritts kleiner ist als im Einzelschritt (vgl. [1], [2]).

In der Praxis begegnet man häufig Problemstellungen, bei denen die bei (1) angenommene Homogenität nicht gegeben ist, z. B. infolge inhomogener Randdaten. Es läßt sich nun zeigen, daß der *Laxsche* Satz auch für die direkte numerische Behandlung der an sich auf (1) zurückführbaren Aufgabenstellung

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} u(t) - A(t) u(t) &= a(t), \\ u(0) &= 0 \text{ (oder } u_0) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

gilt, die viele der genannten Probleme umfaßt.

Der Beweis dieser Verallgemeinerung des *Laxschen* Satzes auf Aufgaben vom Typ (2) benutzt als *Konsistenz*-Voraussetzung für einen Differenzenansatz

$$u((n+1)h) = C_h(nh) u(nh) + h \cdot c_h(nh) \dots \dots \dots (3)$$

mit den (möglicherweise aus einem impliziten Ansatz formal entstandenen) Operatoren C_h und c_h :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{C_h(t) - I}{h} - A(t) \right\| &= 0, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \|c_h(t) - a(t)\| &= 0, \end{aligned} \right\} \text{für } 0 \leq t \leq T \quad (I = \text{Identität}).$$

Stabilität ist gegeben, wenn die Lösungsoperatoren G_h des homogenen Differenzengleichungssystems

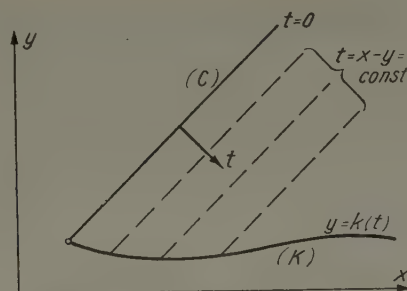
$$G_h((n_2 - n_1)h, n_1 h) := \prod_{v=n_1}^{n_2-1} C_h(vh) \quad (n_2 > n_1)$$

beschränkt sind für $0 \leq n_1 h < n_2 h \leq T$, $0 < h < H$.

Es wird dann ähnlich wie in [1] gezeigt:

I) Konsistenz und Stabilität von (3) sind eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Lösungen von (3) gegen die Lösungen von (2) (mit $h \rightarrow 0$).

II) Die Konvergenzordnung im Großen ist nur eine Potenz von h kleiner als die Konvergenzordnung im Einzelschritt.



Beispiel: Randwert-Aufgabe einer hyperbolischen Differentialgl.:

$$\left. \begin{aligned} u_{xx} - u_{yy} + 2c_1 u_x + 2c_2 u_y + c_3 u &= 0, \quad c_i = c_i(x, y) \\ u &= 0 \quad \text{auf der Anfangs-Charakteristik (C),} \\ 2\gamma_1 u_x + 2\gamma_2 u_y + \gamma_3 u &= \alpha \quad \text{auf der Randkurve (K), } \gamma_1 - \gamma_2 \neq 0 \\ \gamma_i &= \gamma_i(x), \quad \alpha = \alpha(x). \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

Nach Transformation auf $t: = x - y$ und y werden die c_i Funktionen von t und y und die γ_i und α längs (K) Funktionen von t . Für $u(t) = u(t; y)$ ist dann (4) gleichbedeutend mit der Aufgabe (2) mit

$$A(t) u(t) = - \left\{ \int_{k(t)}^y \frac{[(c_1 + c_2) \partial_y + c_3] u}{\varphi(t, \eta)} d\eta + \frac{[(\gamma_1 + \gamma_2) \partial_y + \gamma_3] u_k}{\gamma_1 - \gamma_2} \right\} \varphi(t, y),$$

$$a(t) = \frac{\alpha(t)}{\gamma_1 - \gamma_2} \cdot \varphi(t, y),$$

$$\left(\varphi(t, y) := \exp \left(- \int_k^y (c_1 - c_2) d\eta \right), \quad u_k := u \text{ auf } (k), \quad \partial_y := \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_{t=\text{const}} \right)$$

d. h. (4) ist eine Aufgabe der hier behandelten Art.

Umfangreiche numerische Untersuchungen ergaben für einen dem Larsen Satz entsprechenden Differenzenansatz eine Bestätigung der Aussage II, im Gegensatz dazu war bei einem scheinbar vorteilhafteren Differenzenansatz die Konvergenz um zwei h -Potenzen schlechter als im Einzelschritt (vgl. [3]).

Literatur

- [1] Lax-Richtmyer: Survey of the stability of linear finite difference equations, Comm. Pure Appl. Math. 9 (1956), S. 267.
- [2] Richtmyer: Difference methods for initial-value problems, Interscience Publ., New York, Kapitel III (1957).
- [3] Stetter: The numerical solution of boundary-value problems for certain hyperbolic linear differential equations, Tech. Note No. 7, Contract AF 61(514)—1080, Air Research and Development Command (1959).

Anschrift: Dr. H. J. Stetter, München 9, Achleitner Str. 5

Die Evolution des Integralbegriffes*)

Von A. C. Zaanen

Nach den Versuchen vieler Mathematiker in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts, den *Cauchy-Riemannschen* Integralbegriff zu erweitern, gelang es Lebesgue (1902), weiterbauend auf dem *Borelschen* Maßbegriff (1898), ein Integral zu definieren, wodurch es unter anderem möglich wurde, eine abgerundete Theorie der *Fourierschen* Reihen und Integrale zu begründen. Die *Lebesguesche* Theorie wurde (bis 1920) von Radon, Fréchet und Carathéodory zu einem gewissen Abschluß gebracht. Inzwischen veröffentlichte Daniell (1917) einige Arbeiten, in denen Integrale konsequent als lineare Funktionale betrachtet wurden. Diese Betrachtungsweise, obwohl ziemlich lange unbeachtet geblieben, ist in den letzten Jahrzehnten stark hervorgekommen (Bourbaki, Stone). Man hat hierbei:

a) eine abstrakte Punktmenge X ,

b) eine Klasse L von auf X definierten reellen Funktionen, wobei L ein linearer Verband ist, d. h. wenn $f(x)$ und $g(x)$ zu L gehören, dann auch $a f(x) + b g(x)$ für a, b reell, und auch $\max \{f(x), g(x)\}$ und $\min \{f(x), g(x)\}$,

c) ein auf L definiertes positives lineares Funktional $I(f)$, d. h. $I(a f + b g) = a I(f) + b I(g)$, $I(f) \geq 0$ für $f(x) \geq 0$, wobei $I(f)$ noch der Zusatzbedingung genügt, daß aus $f_n(x) \downarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) folgt, daß $I(f_n) \downarrow 0$.

Ein solches $I(f)$ heißt ein (auf L definiertes) elementares Integral. Es handelt sich nun darum, das elementare Integral zu erweitern auf eine wenn möglich größere Funktionenklasse, in solcher Weise, daß die in (c) genannte Integraleigenschaft erhalten bleibt. Es gibt dafür mehrere Verfahren, die alle auf dasselbe hinauslaufen. Eines dieser Verfahren ist die Kompletterung des metrischen Raumes, der entsteht, wenn in L die Zahl $I(|f - g|)$ als Distanz zwischen $f(x)$ und $g(x)$ eingeführt wird.

Beispiel: X die Menge der reellen Zahlen; L die Klasse aller auf X stetigen Funktionen $f(x)$, die außerhalb eines Intervalles (das von f abhängt) verschwinden; $I(f)$ das *Cauchy-Riemannsche* Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$. Das Erweiterungsverfahren ergibt die Klasse der über X Lebesgue-integrierbaren Funktionen mit dem korrespondierenden *Lebesgueschen* Integral.

Anschrift: Prof. Dr. A. C. Zaanen, Delft, Nassaulaan 15 (Niederlande)

*) Auf Einladung der Tagungsleitung gehaltener Hauptvortrag.

B. ALLGEMEINE MECHANIK

Zur Frage der Lagrangeschen Lösungen beim n -Körperproblem

Von H. Fieber

C. Carathéodory zeigte, daß im dreidimensionalen *euklidischen* Raum außer den trivialen geradlinigen, keine *Lagrangeschen* (homographischen) Lösungen existieren, während dies in der Ebene wohl der Fall ist. Unter gewissen Voraussetzungen trifft dieses Verhalten auch für Räume beliebiger ungerader oder gerader Dimension zu.

Im *euklidischen* r -dimensionalen Raum seien $n > r \geq 2$ Massenpunkte P_k mit den Ortsvektoren $\mathbf{r}_k(t)$ vom Schwerpunkt aus, und den Massen m_k gegeben. Die P_k mögen den Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\mathbf{r}}_k = \sum_{i \neq k} \frac{m_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) \quad (i, k = 1, \dots, n) \quad \dots \quad (1)$$

genügen. Gefragt wird nach den Lösungen $\mathbf{r}_k(t) = q(t) \mathfrak{A}(t) \mathbf{v}_k$ mit $\mathfrak{A} \mathfrak{A}^* = \mathfrak{E}$ und $\mathbf{r}_k(t_0) = \mathbf{v}_k = \text{const.}$, für einen festen Zeitpunkt t_0 . Es seien $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ linear unabhängig. Durch diesen Ansatz wird (1) aufgespalten in

$$\mathfrak{B} \mathbf{v}_k = \mathbf{a}_k = \sum_{i \neq k} \frac{m_i}{|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_k|^3} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_k), \quad \mathfrak{B} = q^2 \mathfrak{A}^* (q \mathfrak{A})' \quad \dots \quad (2).$$

Es seien nun alle m_k von einerlei Vorzeichen; dann ist \mathfrak{B} eindeutig bestimmbar, konstant und regulär, da die α_i ($i = 1, \dots, r$) sich als linear unabhängig erweisen. Aus Gleichung (2) folgt unter der Voraussetzung $0 < Q < q(t)$:

$$\dot{\mathfrak{A}} = \frac{1}{q^2} \mathfrak{A} \left[\hat{\mathfrak{B}} \int \frac{dt}{q} + \mathfrak{C} \right] \dots \dots \dots (3),$$

wobei $\hat{\mathfrak{B}}$ den schiefsymmetrischen Anteil von \mathfrak{B} und die Integrationskonstante \mathfrak{C} eine schiefsymmetrische Matrix bedeuten. Setzt man noch voraus, daß

$$\int_{t_0}^t \frac{d\tau}{q(\tau)} \text{ divergent für } t \rightarrow \infty,$$

so kann der Energiesatz für beschränktes $q(t)$ nur erfüllt werden, wenn $\hat{\mathfrak{B}} = 0$. Für $r < 4$ ist dies auch für nach oben nicht beschränktes $q(t)$ aus dem Flächensatz leicht zu folgern. Setzt man nun von vornherein $\hat{\mathfrak{B}} = 0$ voraus, dann wird die aus (2) neben (3) noch ableitbare Differentialgleichung für $q(t)$

$$q^3 \ddot{q} \mathfrak{C} - q \bar{\mathfrak{B}} = -\mathfrak{C}^2 \text{ mit } \bar{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B} = \text{symmetrisch} \dots \dots \dots (4).$$

Transformiert \mathfrak{R} die Matrix \mathfrak{B} auf Hauptdiagonalform, so gleichzeitig auch \mathfrak{C}^2 . Die bzw. Elemente seien β_{kk} und γ_{kk} . Sind alle β_{kk} einander gleich und gleich β , so auch alle $\gamma_{kk} = -\gamma^2$ und es folgt $\mathfrak{B} = \beta \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}^2 = -\gamma^2 \mathfrak{C}$. Ist dies nicht der Fall, so kann (4) nur für $q(t) = \alpha = \text{const.}$ bestehen und hat $\alpha \mathfrak{B} = \mathfrak{C}^2$ zur Folge. Dies kommt jedoch für ungeradzahlige Räume nicht in Betracht, da dann auf Grund der Schiefsymmetrie von \mathfrak{C} die Matrix \mathfrak{B} singular ist. Ist $\mathfrak{C}^2 = -\gamma^2 \mathfrak{C}$ so gilt für ungeradzahlige Räume $\gamma = 0$ und daher $\mathfrak{C} = 0$, nach (3) also $\mathfrak{A} = \text{const.}$ Aus (4) folgt dann $q^2 \ddot{q} = \beta$ und es existiert nur für $\beta > 0$ ein $q(t)$, das den Voraussetzungen genügt. Mithin gilt:

In Räumen ungerader Dimension gibt es unter den obigen Voraussetzungen nur für $\beta > 0$ *Lagrangesche* Lösungen, wobei die Bewegung der Massenpunkte längs Geraden durch den Schwerpunkt erfolgt.

In Räumen gerader Dimension liefert (3) mit $\mathfrak{B} = \beta \mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}^2 = -\gamma^2 \mathfrak{C}$

$$\mathfrak{A}(t) = e^{P(t)\mathfrak{C}}, \quad P(t) = \frac{1}{\gamma} \arccos \frac{\beta \omega + \gamma^2}{\omega \sqrt{k \gamma^2 + \beta^2}} \Big|_{\omega=1}^{\omega=q(t)}$$

wobei k eine Integrationskonstante bedeutet. Hierbei wurde angenommen, daß $\mathfrak{A}(t_0) = \mathfrak{C}$, $q(t_0) = 1$ ist. Mit $P(t) \gamma = \varphi(t)$ ergibt sich dann

$$\mathfrak{A}(t) = \cos \varphi \cdot \mathfrak{C} + \frac{1}{\gamma} \sin \varphi \cdot \mathfrak{C}, \quad q(t) = \frac{\frac{\gamma^2}{\beta}}{1 - \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\beta^2} k}.$$

Die Bahnen werden also durch ebene Kegelschnitte dargestellt, mit einem Brennpunkt im Schwerpunkt des Systems. Ist andererseits $q = \alpha$, $\alpha \mathfrak{B} = \mathfrak{C}^2$, so folgt aus (3)

$$\mathfrak{A}(t) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{(2v)!} \left(\frac{t-t_0}{\alpha^2} \right)^{2v} (\alpha \mathfrak{B})^v + \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{(2v+1)!} \left(\frac{t-t_0}{\alpha^2} \right)^{2v+1} (\alpha \mathfrak{B})^v \mathfrak{C}$$

und ist orthogonal, wie man unter Berücksichtigung, daß \mathfrak{C} negativ definit ist, aus $\mathfrak{R}^* \mathfrak{A} \mathfrak{R} = \mathfrak{C}$ erkennt. Also gilt:

In Räumen gerader Dimension existieren neben den trivialen, noch weitere *Lagrangesche* Lösungen, die den obigen Voraussetzungen genügen und als Bahnkurven entweder ebene Kegelschnitte liefern, oder deren Bahnen auf $2m$ -dimensionalen Kugeln verlaufen.

In all diesen Fällen erweist sich

$$\int_{t_0}^t \frac{d\tau}{q(\tau)}$$

divergent mit $t \rightarrow \infty$.

Nichtlineare Probleme der Regelungstheorie^{*)}

Von K. Magnus

Es wurde ein Überblick über Problemstellungen und einige neuere Ergebnisse der Theorie nichtlinearer Regelungserscheinungen gegeben. Dabei erwies sich eine Beschränkung auf Verfahren, die auf Systeme beliebig hoher Ordnung anwendbar sind, als zweckmäßig. Eine wesentliche Tatsache, die aus dem Studium der zahlreichen, in den vergangenen etwa fünf Jahren erschienenen Arbeiten abgeleitet werden kann, ist das Vordringen exakter Berechnungsmethoden. Es ist gelungen, einerseits für gewisse Klassen von Regelsystemen, andererseits für bestimmte Probleme Verfahren zur exakten Untersuchung zu entwickeln.

Die *Ljapunovsche* Theorie zur Bestimmung der Stabilität der Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen wurde von verschiedenen Autoren erweitert und ergänzt. Ajzerman und Gantmacher gelang die Verallgemeinerung von zwei *Ljapunovschen* Sätzen auf Systeme, deren nichtlineare Funktionen nur bereichsweise analytisch zu sein brauchen. Die *Lurjeschen* Untersuchungen über Systeme mit nur einer nichtlinearen Funktion wurden von Hahn ergänzt durch Angabe der hinreichenden Stabilitätsbedingungen für Systeme, deren einzige nichtlineare Funktion vom Relaisstyp mit Totbereich und Hysterese ist. Die Technik der Stabilitätsbestimmung wurde von Lehnigk durch einen Ansatz für die *Ljapunovsche* Funktion bereichert, der wegen der Einführung zusätzlicher Parameter besonders anpassungsfähig ist.

Für Relaissysteme liegt eine weitgehend abgeschlossene Theorie von Cypkin vor. Sie gilt für Systeme, die aus einem linearen Teilsystem und einem Relaiselement bestehen. Da am Ausgang des Relaiselementes nur Impulse konstanter Amplitude auftreten können, läßt sich die Reaktion des linearen Teilsystems durch Überlagerung von Übergangsfunktionen ermitteln. Die Stabilität kann durch Untersuchung des komplexen Übertragungsfaktors $W(p)$ des linearen Teilsystems bestimmt werden. Das Verhalten von Relaissystemen hängt eng mit dem der Impulssysteme zusammen, wobei das Impulssystem aus dem Relaissystem durch Ersatz des Relaiselementes durch ein Impulselement entsteht. Das Impulselement moduliert ein ankommendes Signal so, daß an seinem Ausgang eine zeitlich äquidistante Folge von Impulsen entweder konstanter Amplitude bei variabler Dauer, oder konstanter Dauer bei variabler Amplitude auftritt. Auch hierfür läßt sich die Reaktion des linearen Teilsystems durch Überlagern von Übergangsfunktionen berechnen. Es ist möglich, einen Übertragungsoperator $W^*(p)$ zu definieren, mit dem ganz analog zu den bekannten Untersuchungen linearer Systeme verfahren werden kann. Zu allen wichtigen für lineare Systeme bekannten Stabilitätskriterien lassen sich dabei völlig analoge Kriterien für Impulssysteme finden. Ihre Anwendung ist zum Teil sogar leichter als bei linearen Systemen.

Zahlreiche Untersuchungen sind dem Problem der Optimierung in nichtlinearen Regelkreisen gewidmet. Nachdem man erkannt hat, daß das Verhalten optimal abgestimmter linearer Regelkreise durch Einführen von geeigneten Nichtlinearitäten noch verbessert werden kann, sind zahlreiche Methoden zur Synthese optimaler, nichtlinearer Regelsysteme ausgearbeitet worden. So

untersucht Ostrovskij ein lineares System von der Form $\sum_{i=0}^n a_i x^{(i)} = 0$, bei dem jedoch die

Koeffizienten je zwei verschiedene Werte $a_i = b_i$ bzw. $a_i = c_i$ annehmen können. Durch geeignete Wahl der b_i und c_i und durch geschicktes Umschalten von einem Koeffizientensystem zum anderen lassen sich sehr günstige Lösungen finden. Letov hat gezeigt, daß durch rechtzeitiges Umschalten des Vorzeichens nur eines Koeffizienten eine Störung bereits nach einer Halbschwingung vollständig ausgeglichen werden kann. Die extreme Fragestellung des Optimierungsproblems dürfte im wesentlichen auf Lerner, Sylva und Feldbaum zurückgehen; sie wurde wesentlich durch Arbeiten von Pontrjagin und seinen Schülern gefördert. Es konnte gezeigt werden, daß ein in kürzester Zeit erfolgender Übergang aus einem Zustand x_1 (x sei ein n -dimensionaler Vektor der Zustandsvariablen) in einen Zustand x_2 stets zur vollen Ausnützung der zugelassenen Bereiche für alle vorhandenen Stell- oder Steuergrößen führt. Das Hauptproblem besteht in der Berechnung der jeweiligen Umschaltzeitpunkte, zu denen die Stellgrößen von einem Extremwert zum anderen springen müssen. Vorschläge zur Verwirklichung dieser Art von Optimalsystemen sind bisher nur für Systeme zweiter bzw. dritter Ordnung bekannt geworden.

Trotz beachtlicher Fortschritte bei der Entwicklung exakter Berechnungsmethoden ist das Interesse an anpassungsfähigen Näherungsverfahren nicht geringer geworden. Hier konnte nachgewiesen werden, daß die meisten der bekanntgewordenen „quasi-linearen“ Näherungsverfahren im ersten Schritt völlig äquivalent sind. Am vorteilhaftesten scheint die Variationsmethode von Ritz in der von Galerkin angegebenen Form zu sein. Trotz zahlreicher Ansätze

^{*)} Auf Einladung der Tagungsleitung gehaltener Hauptvortrag.

(Sagirov, Glatenok) ist eine befriedigende Abschätzung der Fehler dieser Näherungsverfahren bisher noch nicht gelungen. Das liegt zum Teil in der Tatsache begründet, daß nicht so sehr der Fehler der Zustandsgrößen selbst, sondern der Fehler von sekundären, erst aus den bereits fehlerbehafteten Zustandsgrößen abgeleiteten Größen interessiert. Bei der Berechnung von stationären Schwingungen sind dies z.B. die Fehler der Amplituden- und Frequenzwerte.

Das tiefere Eindringen in die Natur der nichtlinearen Erscheinungen machte Erweiterungen und Ergänzungen des Begriffssystems notwendig, das bisher zur Beschreibung linearer Systeme verwendet wurde. Dieser Prozeß wird sicher noch weiter fortschreiten. Richtungsweisend kann hier eine von Minorsky gegebene Klassifikation von Verzweigungspunkten der dynamischen Stabilität sein.

Anschrift: Prof. Dr. K. Magnus, Stuttgart O, Hackländerstr. 33

Über die totale Stabilität erzwungener Bewegungen mit kombinierter Dämpfung

Von Rolf Reißig

Wir betrachten einen einfachen Schwinger, dessen Verrückung mit x bezeichnet sei; $x' = y$ sei die Geschwindigkeit. Es mögen folgende Kräfte wirken: Die nichtlinearen, streng monoton abnehmenden Rückstell- und Dämpfungskräfte $-G(x)$ und $-F(y)$ [$G(0) = F(0) = 0$], die Festreibung $-\mu \operatorname{sgn} y$ und die Fremderregung $E(t)$. Diese braucht nicht periodisch zu arbeiten, soll aber in dem Sinne oszillatorisch sein, daß

$$-M \leq E(t) \leq +M; \quad E(t_k) = (-1)^k M; \quad t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots; \quad 0 < T' \leq t_{k+1} - t_k \leq T''.$$

Wir verlangen ferner $M > \mu$; im entgegengesetzten Falle streben alle Bewegungen zu einer Ruhelage in dem Gleichgewichtsabschnitt $G^{-1}(M - \mu) \leq x \leq G^{-1}(\mu - M)$ hin. Die allgemeine Bewegung des Schwingers ist eine Stillstandsbewegung; in den Intervallen mit $x' \neq 0$ gilt die Differentialgleichung

$$x'' + F(x') + \mu \operatorname{sgn} x' + G(x) = E(t),$$

während in Zeitabschnitten, wo $x' = 0$, (Pausen) die Ungleichung

$$E(t) - \mu \leq G(x) \leq E(t) + \mu$$

besteht. Wir fragen nach der Stabilität einer Bewegung. Im Falle linearer Federkraft [$G(x) \equiv x$] ist dieses Problem weitgehend gelöst: Unter sehr allgemeinen Voraussetzungen über die Dämpfung $-F(y)$ sind alle Bewegungen für hinreichend große t -Werte gleichmäßig beschränkt (D -Verhalten) und asymptotisch stabil im Ganzen. Jetzt soll aber die Federkraft nichtlinear sein, und es wird nicht nach der Stabilität bei einer einmaligen Anfangsstörung, sondern bei dauernd vorhandenen Störungen gefragt. Darunter ist folgendes zu verstehen: Die Bewegung, für die wir uns interessieren, wird als ungestörte Bewegung ($x, x' = y$) bezeichnet und als bekannt vorausgesetzt. Die Nachbarbewegungen heißen gestörte Bewegungen ($\bar{x} = x + u, \bar{x}' = y + v$). Diese genügen nicht mehr den oben angegebenen Beziehungen; vielmehr überlagert sich der wohlbestimmten Erregerkraft $E(t)$ eine unkontrollierbare, von der Zeit t und den Koordinatendifferenzen u, v abhängige Störkraft $R(u, v, t)$, so daß wir für die gestörte Bewegung die Differentialgleichung

$$\bar{x}'' + F(\bar{x}') + \mu \operatorname{sgn} \bar{x}' + G(\bar{x}) = E(t) + R(u, v, t); \quad \bar{x}' \neq 0$$

und die Pausenrelation

$$E(t) + R(u, v, t) - \mu \leq G(\bar{x}) \leq E(t) + R(u, v, t) + \mu; \quad \bar{x}' = 0$$

erhalten. Die ungestörte Bewegung ist stabil bei ständig wirkenden Störungen (total stabil), wenn man einer beliebig vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ zwei positive Schranken η und δ zuordnen kann, so daß aus

$$|R(u, v, t)| \leq \eta \quad (|u| \leq \varepsilon, \quad |v| \leq \varepsilon, \quad t \geq 0)$$

und

$$|u(0)| \leq \delta, \quad |v(0)| \leq \delta$$

für alle Zeiten $t \geq 0$

$$|u(t)| \leq \varepsilon, \quad |v(t)| \leq \varepsilon$$

folgt. Zum Beweis der totalen Stabilität weist man erst einmal nach bekannter Methode das D -Verhalten des Schwingers nach; daraus ergibt sich für $t \geq 0$

$$|x(t)| \leq a, \quad |y(t)| \leq b.$$

Nun wird eine von u und v abhängige *Ljapunowsche* Funktion aufgestellt, die in der oberen und unteren Halbebene (u, v) stetig und differenzierbar ist, auf der u -Achse aber zwei verschiedene Werte annehmen kann. Man setzt nämlich für $u \geq 0$

$$k(2u) = \min_{|x| \leq a+u} [G(x+u) - G(x-u)]; \quad h(2u) = \max_{|x| \leq a+u} [G(x+u) - G(x-u)]$$

$$K(u) = \int_0^u k(s) ds; \quad H(u) = \int_0^u h(s) ds.$$

Nur bei linearer Federkraft gilt $h(u) = k(u)$ für jeden Wert $u > 0$, im nichtlinearen Fall jedoch $h(u) > k(u) > 0$. Die *Ljapunowsche* Funktion erklärt man für $u \geq 0$ als

$$w(u, v) = K(u) + \frac{1}{2} v^2 [v \geq 0] \quad \text{und} \quad H(u) + \frac{1}{2} v^2 [v \leq 0];$$

für $u \leq 0$ sei $w(u, v) = w(-u, -v)$. Mit Hilfe der Bewegungsgleichung und Pausenbedingung findet man während jeder gestörten Bewegung

$$w' = \frac{dw}{dt} \leq -v [F(y+v) - F(y)] + v R(u, v, t).$$

Kann man zeigen, daß $w(u, v)$ ständig klein bleibt, wenn die Beträge der Anfangswerte von u und v und der Störkraft R hinreichend klein ausfallen, so ist die totale Stabilität erwiesen. Wegen des Störgliedes kann indessen w' bei kleinem $|v|$ positiv sein; auch die Doppeldeutigkeit von w für $v = 0$ wirkt sich ungünstig aus, da w bei jedem Vorzeichenwechsel von v sprunghaft um den Betrag $[H(|u|) - K(|u|)]$ wächst. Wenn man nun aber w' in geeigneter Weise durch totale zeitliche Ableitungen nach oben abschätzt, kann man in der u, v -Ebene einen geschlossenen doppel-punktfreien Weg finden, den die Bahnen $u(t)$, $v(t)$ nicht nach außen überschreiten können. Er liegt im vorgeschriebenen Quadrat $|u| \leq \varepsilon$, $|v| \leq \varepsilon$, und jedes von ihm eingeschlossene Quadrat $|u| \leq \delta$, $|v| \leq \delta$ eignet sich als Bereich der zulässigen Anfangsstörungen. Die Konstruktion erfordert $|R| \leq \eta$ sowie eine Einschränkung der Nichtlinearität von Dämpfung und Rückstellkraft; denn man muß annehmen, daß

$$F(y_1) - F(y_2) \geq 2D(y_1 - y_2) \quad \text{für} \quad |y| \leq b.$$

$$\sqrt{\max_{|x| \leq a} G'(x)/2} > 2D > \sqrt{\max_{|x| \leq a} G'(x)/2} - \sqrt{\min_{|x| \leq a} G'(x)/2}.$$

Die erwähnte Methode der Stabilitätsanalyse gestattet zwei wichtige Anwendungen.

1. Es wird $R(u, v, t) \equiv 0$, $4D > \left[\max_{|x| \leq a} G'(x) \right] / \left[\sqrt{\min_{|x| \leq a} G'(x)} \right]$ angenommen. Dann läßt sich in der u, v -Ebene statt des geschlossenen Weges eine gegen den Ursprung konvergierende Spirale konstruieren, so daß $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0$ für $|u(0)| \leq \delta$, $|v(0)| \leq \delta$. Die ungestörte Bewegung ist asymptotisch stabil im Kleinen.

2. Bei linearer Federkraft wird der Reibungskoeffizient μ durch einen variablen Koeffizienten $\bar{\mu}(t)$, wobei $\mu \leq \bar{\mu}(t) \leq \mu_0$, ersetzt. Dann existiert in der u, v -Ebene ein eindeutig bestimmter optimaler geschlossener Weg, den alle Phasenbahnen $u(t)$, $v(t)$ im Laufe der Zeit erreichen und nach innen überschreiten. Seine Dimensionen kann man in der Form

$$\max |u| = (\mu_0 - \mu) \varphi(D), \quad \max |v| = (\mu_0 - \mu) \psi(D) [F(y_1) - F(y_2) \geq 2D(y_1 - y_2)]$$

abschätzen, wobei φ, ψ fallende Funktionen von D sind, die explizit angegeben werden können; $\varphi, \psi \rightarrow \infty$, wenn $D \rightarrow 0$. Insbesondere kann man während der Bewegung $\bar{\mu} = \mu$ und in einer Pause $\bar{\mu} = \mu_0$ setzen, so daß der Schwinger einer Haftreibung, die stärker als die Gleitreibung ist, unterliegt; dieses Modell gibt den wahren Charakter der Festreibung wieder, während das Modell mit einheitlichem Reibungskoeffizienten ($\mu = \mu_0$) die Tatsachen verfälscht. Auf Grund unserer Resultate stimmt die Bewegungsmannigfaltigkeit im Fall $\mu_0 > \mu$ mit derjenigen im vereinfachten Fall $\mu_0 = \mu$ bis auf eine Abweichung von höchstens $(\mu_0 - \mu) \varphi(D)$ im Ausschlag und $(\mu_0 - \mu) \psi(D)$ in der Geschwindigkeit überein; unsere Methode gestattet nicht den Nachweis der asymptotischen Stabilität einer Bewegung für $\mu_0 > \mu$, erst recht nicht der asymptotischen Stabilität im Ganzen. Es wäre interessant, zu erfahren, ob dies daran liegt, daß unsere Abschätzung des Schwingerverhaltens zu grob ist oder daß in der Praxis womöglich gar keine exakte asymptotische Stabilität der Reibungsbewegung auftritt.

Massenkraft und Massendrehmomente ebener Gelenkgetriebe

Von Adam Schmidt

Massenkraft und Massendrehmomente ebener Gelenkgetriebe wie Schubkurbel, Nebenpleueltriebwerk, Kurbelviereck usw. werden für den Massenausgleich als *Fourierreihen* des Kurbelwinkels benötigt. Neuerdings beschäftigt sich die Landmaschinentechnik mit dieser Fragestellung, da die für den Motorenbau entwickelten Näherungen für ihre Anwendungen nicht genügen. Das rechtfertigt vielleicht, auf ältere Untersuchungen von Karl Bammert und Adam Schmidt hinzuweisen, die auch heute noch Interesse verdienen, da sie die Aufgabe ohne Vernachlässigung behandeln, und damals nur zum Teil veröffentlicht wurden.

Die Aufstellung der erwähnten *Fourierreihen* gelingt leicht, sobald man einige wenige, die geometrischen Verhältnisse charakterisierende Wurzelausdrücke in *Fourierreihen* entwickelt hat. Für die Schubkurbel und das Gelenkviereck sind dies

$$w = \sqrt{A^2 - (B - \cos \varphi)^2},$$

für das Nebenpleueltriebwerk kommt noch hinzu

$$W = \sqrt{A^2 - (a + b \cos \varphi + c \sin \varphi + d \sqrt{A^2 - (B - \cos \varphi)^2})^2}.$$

Der Ausdruck w kann in eine *Fourierreihe* entwickelt werden, indem man ihn als Potenzreihe in $\cos \varphi$ darstellt, sodann

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

setzt und nach Potenzen von $e^{i\varphi}$ umordnet. Man erhält¹⁾

$$w = \frac{A_0}{2} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} A_{\kappa} \cos \kappa \varphi,$$

mit

$$A_{\kappa} = \sum_{\nu=0}^{\infty} A^{1-2\nu} A_{\kappa\nu}$$

$$A_{\kappa\nu} = \sum_{\lambda=0}^{\nu-\kappa/2} B^{2\nu-2\lambda-\kappa} \frac{(-1)^{\nu+\kappa}}{2^{\lambda+\kappa-1}} \binom{1/2}{\nu} \binom{2\nu}{2\lambda+\kappa} \binom{2\lambda+\kappa}{\lambda}.$$

Das Verfahren ist auch bei komplizierteren Getrieben, etwa dem Nebenpleueltriebwerk anwendbar²⁾.

Die Schwierigkeit, die angegebenen Formeln oder die noch wesentlich unbequemereren für W zur numerischen Berechnung nutzbar zu machen, läßt nach anderen Verfahren zur Bestimmung der gesuchten *Fourierreihen* Ausschau halten. Ein solches besteht darin, daß man sich ein Modell anfertigt und dann mit Hilfe eines harmonischen Analysators die gesuchten *Fourierkoeffizienten* direkt bestimmt. Das Verfahren sei wieder am Beispiel der Schubkurbel geschildert. Von einem harmonischen Analysator nach *Mader-Ott* benötigen wir den Satz der Zahnräder, das Tischchen und das Polarplanimeter.

Die Kurbel des Modells wird fest mit einem Zahnrad verbunden, dessen Mittelpunkt mit dem in einer Grundplatte festgelagerten Drehpunkt der Kurbel zusammenfällt, und das die Zahnstange des Analysators von *Mader-Ott* ersetzt. In der Grundplatte sind in entsprechenden Abständen vom Zahnrad der Kurbel Löcher einzubohren, in die die Zahnräder des harmonischen Analysators eingesteckt werden sollen. Das Tischchen des Analysators ist mit Rädern zu versehen, die ihm gestatten, die Hin- und Herbewegung des kolbenseitigen Pleuelendpunktes mitzumachen. Steckt man das zu den ν -ten *Fourierkoeffizienten* gehörige Zahnrädchen des Ana-

¹⁾ Für die ungeschränkte Schubkurbel ist $w = \sqrt{A^2 - \cos^2 \varphi}$ und man findet die *Fourierkoeffizienten* in der angegebenen Art schon bei Biezono-Grammel, Technische Dynamik Band II 2. Aufl., Berlin 1953 Seite 227 abgeleitet. Für die geschränkte Kurbel findet man dort Seite 250ff nur Näherungen. Neuerdings hat E. Mewes die geschränkte Schubkurve ohne Vernachlässigungen behandelt: Formeln für die Massenkraft und kinematischen Zusammenhänge bei geschränkten Schubkurbelgetrieben. Ing. Archiv **24** (1956), S. 291—298.

²⁾ Die Wiedergabe der umfangreichen Rechnung soll demnächst an anderer Stelle erfolgen. Für das Nebenpleueltriebwerk ohne Schränkung vergleiche K. Bammert u. A. Schmidt: Die Kinematik der mittelbaren Pleuelanlenkung in *Fourierreihen*. Ing. Archiv **15** (1944), S. 27—52.

lysators in die für ihn vorgesehene Bohrung der Grundplatte, setzt in seine Führungsbohrung den Fahrstift des Polarplanimeters, das man im übrigen auf das Tischchen aufsetzt, so kann man den gesuchten *Fourierkoeffizienten* A , der Reihe für w durch Ausführung einer Kurbelumdrehung mit dem Meßrädchen des Polarplanimeters ermitteln. Da der Fahrstift des Planimeters und das Tischchen zwangsläufig geführt werden, da weiter die beim Analysator von *Mader-Ott* sonst nötige Rückführung des Fahrarms, wie auch dieser selbst hier wegfällt, kann man eine ausreichende Genauigkeit erwarten.

Anschrift: Prof. Dr. Adam Schmidt, Rostock, Schliemannstr. 40

Über die Elementarsysteme der allgemeinen Systemmechanik

Von *Hans St. Stefaniak*

Bekanntlich stellt man sich vor, daß alle materiellen Gebilde: die festen Körper, Flüssigkeiten und Gase der Mechanik, die anorganischen und organischen Substanzen der Chemie und die unbelebten und belebten Systeme der Biologie aus denselben elementaren Bausteinen aufgebaut sind. Kennt man die Eigenschaften und das Verhalten der Elemente, dann kann man nach dieser Vorstellung das Verhalten aller aus diesen Elementen zusammengesetzten Gebilde berechnen. Um sich ein Bild von den Elementen zu machen, schließt man nun von den Bauwerken zurück auf die Elementarbausteine. Und zwar greift man zu diesem Zweck in der Mechanik nur die erstgenannte Kategorie aus den zahlreichen Erscheinungsformen der Materie heraus — nämlich den festen Körper — benutzt eine Abstraktion davon in Gestalt des starren Körpers, orientiert an Hand dessen das fundamentale Begriffssystem und erhält die Begriffe: 1. Massenpunkt im leeren Raum, 2. Kraft, und 3. Bewegung der Massen im leeren Raum. Wie man weiß, war die klassische Mechanik der Meinung, daß dieses Begriffssystem vollständig sei. Der klassische Mechaniker erhob deshalb eine Zeitlang auch den Anspruch, allein mit Hilfe dieser wenigen, an seinem Umgang mit dem festen Körper abgeleiteten Begriffe einheitlich das Verhalten auch aller übrigen Kategorien materieller Gebilde erklären zu können. Auf den Einwand, worauf er diesen Anspruch eigentlich stützte, hätte er natürlich keine anfängliche, logisch begründete und daher allgemein verbindliche Antwort geben können. Die Mechanik ist denn auch bei diesem Versuch, sowohl das Verhalten der Elemente richtig und vollständig zu beschreiben als auch alle Phänomene mechanisch erklären zu können, gescheitert. Was war die Ursache davon? Von vornherein fehlerhaft im Sinne des Aufbaues einer einheitlichen Theorie war natürlich die dogmatische Einengung der Ausgangsbasis auf den festen Körper unter Außerachtlassung aller übrigen Gebilde. Diese zeigen nämlich — analog den nichtlinearen Schwingungssystemen im Vergleich zu den linearen — zusätzlich eine Reihe von neuartigen Phänomenen, die neben den anderen bestehen und die nicht auf sie zurückgeführt werden können, und welche der feste Körper infolge seiner eingefrorenen Freiheitsgrade nicht mehr so offenkundig aufweist. Deshalb umfaßt das Bild der Elemente der klassischen Mechanik nur einen Minimalausschnitt aus der Wirklichkeit. Das Scheitern ihrer letzten Bemühungen war daher eine zwingende Folge der nicht zu begründenden Einengung ihres Blickwinkels. Seine uneingeschränkte Erweiterung ist daher von grundlegender Bedeutung. Die Frage lautet nun: Wie sieht das Bild von der Materie und besonders von den Materieelementen aus, wenn wir alle Phänomene in den Bereich unserer Betrachtungen von Anfang an mit einbeziehen? Wir wollen nun unter ausdrücklicher Benutzung einer verbreiterten Ausgangsbasis versuchen, darauf eine von den vielen denkbar möglichen Antworten in ihren ersten Grundzügen zu geben. Zu dem Ende gehen wir zuerst von nur einer einzigen Erfahrung in der Strömungsmechanik aus, betrachten dann im Rahmen der allgemeinen Systemmechanik¹⁾ den Übergang von einem System mit einem Freiheitsgrad zu einem Kontinuum. Hierbei wollen wir von vornherein Erkenntnisse und Begriffe aus der Biologie unvoreingenommen mit verwenden, nunmehr jedoch in einer Form, die sie der wissenschaftlichen (mathematischen) Betrachtungsweise zugänglich macht.

Bekanntlich benutzt man bei Gleitlagern als primär die Last tragendes Element den Schmierfilm, der meistens aus Öl, manchmal aber auch aus Luft oder einem anderen Gas besteht. Er besitzt genau wie jedes Maschinenelement eine — oft erhebliche — Formsteifigkeit, welche das Öl oder Gas befähigt, die Last aufzunehmen. Wichtig daran ist für das folgende die allgemeine Erkenntnis, daß ein Etwas im Raume da ist, das gewöhnlich sehr leicht beweglich und deformier-

¹⁾ Die allgemeine Systemmechanik betrachtet einheitlich alle Erscheinungen vom Standpunkt des Mathematikers aus, für den nur „Größen“ existieren, die sich in Raum und Zeit verändern und die untereinander durch „Systeme“ in einem ursächlichen Zusammenhang stehen. Sie macht im Grundsatz keinen wesentlichen Unterschied zwischen mechanischen, elektrischen, belebten oder unbelebten Systemen. Sie beschränkt sich in ihren Begriffen auch nicht auf eine dieser Disziplinen, sondern verwendet sie alle, aber natürlich nur in einer für die wissenschaftliche Betrachtungsweise brauchbaren Form. Dies gelingt mit dadurch, daß sie alle Systeme, Systemgrößen und ihre Verbindungen topologisch in einem Schaltbild darstellt.

bar ist und deshalb zunächst von sich aus keine Tragfähigkeit aufweist. Erst vermöge eines besonderen inneren Bewegungszustandes kann es ungewöhnliche Eigenschaften besitzen, hier im besonderen die für einen festen Körper als typisch angesehene Eigenschaft der Tragfähigkeit und einer gewissen Formstabilität²⁾. Wenn nun ein Strömungsmechaniker den berechtigten Versuch machte, alles an Hand seines — auch wieder beschränkten — Beobachtungsbereiches zu erklären, so kann er, obige Erfahrung benutzend und sie verallgemeinernd, davon ausgehen, daß auch der feste Zustand nur das Ergebnis einer bestimmten, makroskopisch nicht sichtbaren stabilen Bewegungsform eines den Raum erfüllenden Etwas darstellt. Die Frage nach den verschiedenen Materieelementen, ihrer Stabilität und ihren Umwandlungen ist dann identisch mit der Frage nach den verschiedenen elementaren Bewegungsformen, nach deren Stabilität und nach den Übergängen von einer Bewegungsform in die andere. Dies gilt dann auch für die Zustände höherer Ordnung in den chemischen Bindungen und den verschiedenen Aggregatzuständen. Ver-

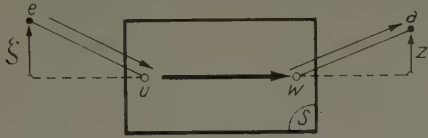


Bild 1. Topologisches Bild eines einsinnig wirkenden Systems S . Der stark ausgezogene Pfeil gibt den Sinn des Wirkungsablaufes vom Eingang u (Reizgröße ζ , Ursache) auf den Ausgang w (Reaktionsgröße z , Wirkung) an

fährt man so, dann kann man nicht mehr die Vorstellung aufrecht erhalten, daß das, was sich bewegt, kontinuierlich im leeren Raum verteilte Massenpunkte seien. Also muß man sich ein anderes Bild von dem den Raum kontinuierlich erfüllenden Medium machen. Wie sieht dieses aus? Hier knüpfen wir, wie schon erwähnt, an die allgemeine Systemtheorie an und zeigen, daß man sich noch andere Vorstellungen von einem Kontinuum machen kann.

Bild 1 stellt ein System S mit nur je einem Freiheitsgrad des Einganges (Größe ζ) und des Ausganges (Größe z) topologisch dar. Zwischen beiden soll ein einsinniger Zusammenhang bestehen, dessen Vorhandensein hier und im folgenden durch den Sinn anzeigende Pfeile angedeutet wird. Das heißt: Auf eine zeitliche Veränderung $\zeta(t)$ der Koordinate ζ des Eingangspunktes e reagiert das System durch eine zeitliche Veränderung $z(t)$ der Koordinate z des Ausgangspunktes a . In dieser Beschreibungsweise des Verhaltens betrachtet man S als primitives biologisches System, bei dem die Funktion $\zeta(t)$ die Rolle einer Reizes (eingehende Information, äußere Ursache) spielt, auf den es dann in Gestalt einer Größenveränderung $z(t)$ (abgegebene Information, äußere Wirkung) antwortet. Es wird nun gezeigt, daß wir, um in diesem Bilde zu einem den Raum kontinuierlich erfüllenden Medium zu kommen, den Übergang auf zwei verschiedene Arten vollziehen können. Bei dem Übergang der ersten Art, den wir als nächstes eingehender betrachten, erweitern wir zuerst, indem wir dem Ein- und Ausgangspunkte e bzw. a die drei Freiheitsgrade des physikalischen Raumes zuerteilen ($\vec{\zeta}$ und \vec{z} sind dann Vektoren im ζ - bzw. z -Raum), und fügen dann eine beliebig dichte Folge von solchen Eingangs- und Ausgangspunkten e_i und a_k hinzu. Diese grenzen, wenn sie nach einem bestimmten Prinzip geordnet sind, im einfachsten Fall sowohl im ζ -Raum als auch im z -Raum je einen Körper ab und bilden dessen Oberfläche E bzw. A (Bild 2). Man hat sich dabei vorzustellen, daß die Bewegung jedes Punktes e_i von E die jedes Punktes a_k von A beeinflusst. Hiernach besteht die Wirkung von S also darin, daß es die Oberfläche E im ζ -Raum auf die Fläche A im z -Raum abbildet, wobei der Zusammenhang zwischen E und A von der Zeitfunktion $E(t)$ abhängt. Lassen wir beide Räume zum φ -Raum zusammenfallen und verbinden wir nun E mit A , dann gelangen wir zu dem Bild einer biologischen Zelle oder eines belebten Körpers (Bild 3). Bei Bild und Original ist nämlich die Zellwandung H

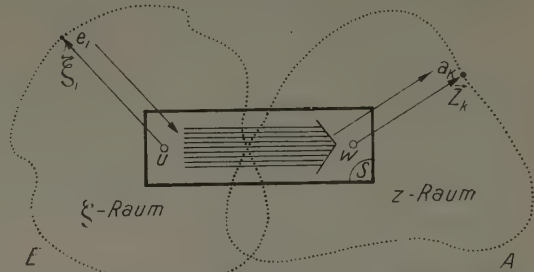


Bild 2. System mit kontinuierlich verteilten Eingangs- und Ausgangsgrößen ζ_i bzw. z_k . Aus System von Bild 1 durch stetige Aneinanderlagerung der Punkte e bzw. a gewonnen

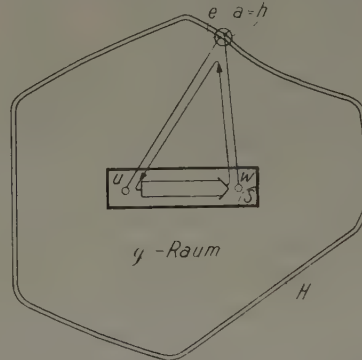


Bild 3. Prinzipschaltbild einer Zelle, aus Bild 2 durch Verbindung des ζ - mit dem z -Raum zum φ -Raum entstanden. Im Sinne der Wirkungspfeile stellt die Deformation der Zellwand H einerseits einen äußeren Reiz für S und andererseits seine Aktion oder Reaktion darauf dar. Infolge dieses doppelten Zusammenhanges von H mit S ergibt die gerichtete Verbindung

$\vec{h} \leftarrow \vec{u}$ einen einsinnig durchlaufenden Wirkungskreislauf

²⁾ Zu einer in gleicher Richtung liegenden Erkenntnis führt auch schon eine auffallende Beobachtung an festen Körpern: Versetzt man einen Kreis in den Zustand einer heftigen Rotation, so bekommt er dadurch eine ungewöhnliche Lagenstabilität.

auf zweifache Weise mit dem System (Kern) verbunden: Eine Deformation der Haut ist einerseits als äußerer Reiz für das System zu betrachten, andererseits stellt sie, — wenn auch nicht notwendig ausschließlich — eine äußere Reaktion des Systems darauf dar.

Was ein Charakteristikum der Eigenbewegungen der Zelle anlangt, so betrachten wir nochmals Bild 2. Verformen wir — was wir hier noch in der Hand haben — von außen her die Eingangsfläche räumlich und zeitlich nach allen denkbaren Funktionen, dann wird S in Gestalt von allen möglichen Verformungen reagieren. Im allgemeinen wird die Zeitfunktion $E(t)$ der Verformung der Eingangsfläche E nicht mit $A(t)$ übereinstimmen; nur für ausgesuchte Funktionen wird es für längere Zeit der Fall sein, daß die Eingangsfläche durch S auf sich selbst abgebildet wird. Man kann in diesen so ausgezeichneten Fällen E mit A verbinden und dann die äußere Quelle der Erregung entfernen und trotzdem bleibt anschließend die Bewegung aufrecht erhalten: das System erregt nunmehr seine Bewegungen selbst, und dieses ist ein Charakteristikum einer Klasse von Eigenbewegungen im φ -Raum.

Was zeichnet diese Eigenbewegungen einer Zelle von den übrigen aus? Wir nehmen an, daß sich die Form der geordneten Eigenbewegungen von den benachbarten Formen durch das Vorhandensein einer Optimaleigenschaft unterscheidet. Ein Biologe würde so sagen: das „System“ oder die „Natur“ sucht sich die Bewegungen heraus, die es als besonders angenehm empfindet. Nehmen wir einmal diese Formulierung ernst und betrachten sie als verbalen Ausdruck eines mathematisch noch zu analysierenden Sachverhaltes! Was folgt daraus? Als erstes schließen wir: damit ein System in einem bestimmten Augenblick ein Optimum aufsuchen kann, muß es zuvor schon eine Abweichung davon besitzen. Es sind also in dieser Darstellung des Biologen zunächst zwei Unterstellungen enthalten: 1. Nach der aus seiner besonderen Erfahrung abgeleiteten Anschauung ist das System von Anfang an nicht fest an das Optimum gebunden; es könnte daher im Prinzip, wenn es wollte, sich auch anders verhalten. 2. Folgt es aber der Tendenz zum Optimum hin, so findet es dieses nicht sofort und beharrt darin, sondern es muß dieses erst aufsuchen; es ist also blind in bezug auf den Optimalzustand.

Bezüglich des gesamten Verhaltens der Zelle würden wir also von vornherein zu einer zu engen Vorstellung gelangen, wenn wir das System als ein „mechanisch reagierendes“ annähmen, d. h. wenn wir den Zusammenhang zwischen Reiz und Reaktion a priori als absolut starr und nicht mit weiteren Freiheitsgraden ausgestattet betrachteten. Wir müssen ihn im Sinne unserer Einleitung von Anfang an als nicht bindend und von der Art, wie in lebenden Systemen offenkundig vorhanden, annehmen. Um diese, der mechanistischen Vorstellung widersprechende Eigenart im einzelnen deutlich zu machen, überlegen wir weiter, daß in der biologischen Beschreibung neben den eben erwähnten zwei noch eine dritte, entscheidende Unterstellung enthalten ist: Wenn wir von Reiz und Reaktion sprechen, dann muß primär ein System da sein, das 1. durch Bewegung von H gereizt werden kann, 2. die Reize empfindet, 3. reagiert und 4. spontan agiert, indem es H von sich aus bewegt. Wir gehen demgemäß nunmehr von der für das folgende grundlegenden Annahme aus, daß ein System mit diesen Eigenschaften existiert. Demnach erscheint S als Träger verschiedener Funktionen außerhalb des Raumes, in dem sich die H -Bewegungen abspielen. Wir nennen jenen Raum, in dem die Empfindungen vor sich gehen, den ψ -Raum zum Unterschied von dem φ -Raum (physikalischer Raum) der beobachtbaren H -Bewegungen. Um die Zusammenhänge zwischen beiden Räumen und ihre Eigenart im einzelnen aufzeigen zu können, nehmen wir S aus dem φ -Raum heraus, spalten dann S in einzelne Systeme S_1, S_2, S_3 mit nur je einer Funktion auf und bilden sie und die Zusammenhänge ihrer Größen, wie in der allgemeinen Systemmechanik üblich, in topologischer Form ab. Von Bild 3 gelangen wir dann zu Bild 4, von dem zunächst nur der linke ausgezogene Teil K betrachtet werden soll³⁾. Die im φ - und ψ -Raum stattfindenden Bewegungen sind miteinander durch die Systeme S_1, S_2 und S_3 in einem ringförmig geschlossenen Kreislauf gekoppelt. Das primär steuernde System S_1 steuert durch Verschieben des Gestänges G in Richtung der X_i -Koordinate des ψ -Raumes mittels des Systems S_2 über den Ausgang w die x_i -Bewegungen des Punktes h_i im physikalischen Raum (φ -Raum). Dabei hat man sich hier etwa vorzustellen, daß jeder Stellung des Gestänges G eine bestimmte Form einer geordneten Bewegung des Punktes h_i zugeordnet ist. X_i stellt also einen Parameter der Bewegungsform dar. Natürlich muß man eine der unendlich großen Anzahl der Zellpunkte des φ -Raumes und der Parameter entsprechend große Anzahl n von Eingangskoordinaten X_i des ψ -Raumes annehmen, die im übrigen alle senkrecht zur η -Koordinate gelegen sein sollen. Das die Bewegungen — durch den Eingang u — als Reize aufnehmende und in die Größe der Empfindungen umwandelnde System ist S_3 . In ihm vollzieht sich der Übergang von dem Raum der Bewegungen in den der Zelle zugeordneten Raum, in dem sich die Empfindungen abspielen. Hierbei gehen wir

³⁾ Siehe auch H. St. Stefaniak, Über geordnete und ungeordnete natürliche Bewegungen und ihre Deutung, ZAMM 38 (1958), S. 323/28.

zunächst⁴⁾ davon aus, daß das System die innerhalb einer bestimmten Zeitdauer τ_m ablaufenden φ -Bewegungen — z. B. rhythmischer Natur — als Ganzes, als Form empfindet. Weiterhin nehmen wir an, daß beständige, mathematisch definierbare Idealformen existieren. Werden sie aufgefunden und eingehalten, so empfindet das System diesen Zustand als besonders angenehm und Abweichungen davon als unangenehm. Die Veränderung der Größe η der mit der jeweils eingestellten Bewegungsform verbundenen Empfindungen soll durch die Änderung der Höhenlage des Punktes O dargestellt und S_1 durch S_3 in Gestalt der Verschiebung des Punktes O in η -Richtung angezeigt werden. Stellt S_1 durch Verschiebung nach $+X_i$ oder $-X_i$ eine andere Bewegungsform ein, so wird einerseits die vertikale Führung M von O in X_i -Richtung mitgenommen; andererseits ändert sich primär der φ -Bewegungszustand und sekundär in Verbindung damit über S_3 die η -Koordinate von O . Gleichzeitig mit seiner Hin- und Herbewegung nach allen i -Koordinaten vollzieht sich also eine Auf- und Abbewegung, so daß O in dem $(n+1)$ -dimensionalen ψ -Raum eine Fläche F (Führungsfläche) beschreibt. Im allgemeinen wird sie verschiedene Extrema aufweisen, die im Falle eines Minimums optimalen Lagen im ψ -Raum, optimalen Bewegungsformen im φ -Raum entsprechen.

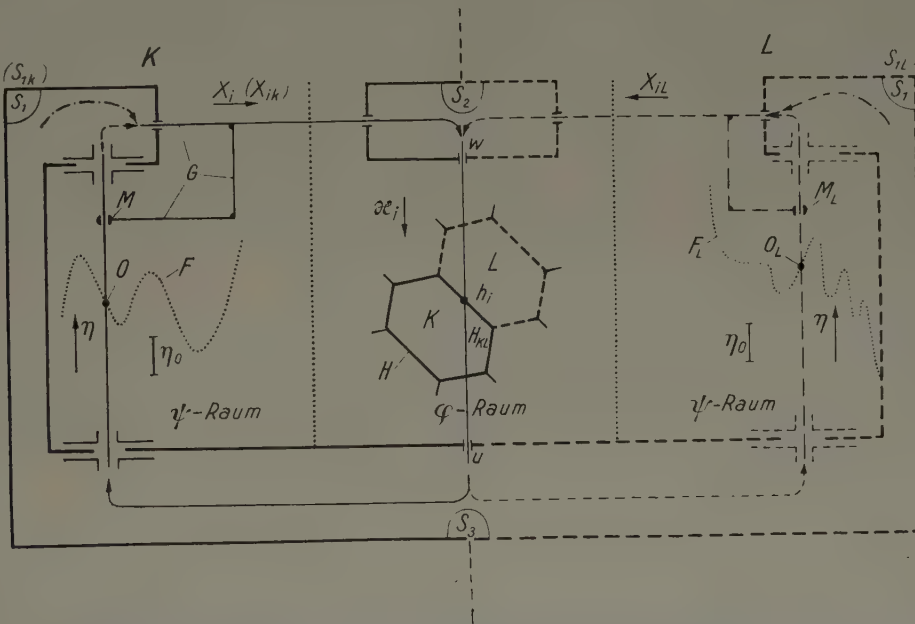


Bild 4. Prinzipialschaltbild für eine Zelle mit seinen Steuer- und Teilsystemen S_1, S_2, S_3 und Darstellung der Zusammenhänge zwischen φ - und ψ -Raum. S_1, S_2, S_3 sind aus S von Bild 3 durch seine Herausnahme aus dem φ -Raum und seine Aufgliederung in die drei Teilsysteme des ψ -Raumes entstanden

Man erkennt, daß S_3 zwar das unveränderliche Gesetz für die geordneten Bewegungen enthält, daß aber letzten Endes die Bewegungen des ganzen Systems entscheidend von S_1 her und der Art seiner Bindung an die Führungsfläche F bestimmt werden. Hier setzen wir voraus, daß S_1 — wie durch Stricheln des Pfeiles angedeutet — nicht absolut an einen besonders ausgezeichneten Punkt von F gebunden ist. Es soll zwar die Tendenz haben, einem Minimum zuzustreben, im übrigen aber nicht fest daran gebunden sein. Es besitzt voraussetzungsgemäß also die Freiheit, wahlweise mehr oder weniger davon abzuweichen und sich z. B. — im Sinne des strichpunktierten Pfeiles — an eine in Bild 4 nicht weiter eingezeichnete ideale Führungsfläche anzuschalten. Das Vorhandensein dieser Freiheit bildet auch eine erste notwendige Voraussetzung, um der Tendenz zu einem Optimalzustand folgen zu können. Denn, um das Minimum als solches durch ständiges Tasten erkennen zu können, muß S_1 die Möglichkeit haben, davon abzuweichen. Als zweite Voraussetzung dafür müssen wir annehmen, daß S_1 einen Zeitsinn und ein Gedächtnis hat, das eine gewisse, wenn auch nur sehr kurze Zeit τ_0 anhält. Der Suchprozeß wird sich dann so vollziehen, daß S_1 kleine seitliche X_i -Schritte ausführt, darnach jeweils feststellt, in welchem Sinne die Veränderung der η -Koordinate erfolgt, und anschließend auf Grund des unmittelbar vorher festgestellten Ergebnisses — die weit zuvor liegenden Ereignisse sind schon vergessen — die Richtung des nächsten Schrittes sinnvoll einstellt. Hat S_1 auf diese Weise — durch gelenkten Zufall also — einen optimalen Aufenthaltsort O gefunden, so beharrt es darin nicht in absoluter Ruhe, sondern führt wie ein Blinder um diesen herum ständig eine unregelmäßige Suchbewegung mit statistisch schwankender Frequenz und Amplitude aus. Die Frage nach dem momentanen

⁴⁾ Um vollständig zu sein, müßten wir hier als weiteres Merkmal noch, wie es später auch geschieht, die Gestalt der Zelle mit hinzunehmen.

Aufenthaltort ist deshalb eine Frage der Statistik. Die Wahrscheinlichkeit, den Punkt O in der unmittelbaren Umgebung des Optimalpunktes anzutreffen, wird offenbar dort größer sein als in weiterer Entfernung davon, und sie wird mit der Schärfe des Minimums zunehmen. Wir können daher die Form des Minimums als Maß für die innere Stabilität des durch seine X_T -Lage im ψ -Raum festgelegten Bewegungszustandes betrachten. Diese Art von Stabilität wollen wir — zum Unterschied von der neben und unabhängig von ihr bestehenden dynamischen Stabilität einer Bewegung — als energetische Stabilität bezeichnen⁵⁾. Analog zu einer Erscheinung bei den Organismen müssen wir hier noch annehmen, daß für S_1 noch eine endliche Empfindungsschwelle η_0 existiert, unterhalb deren eine Änderung nicht registriert wird. Die beim systematischen Abtasten des Minimums auftretenden η -Schwankungen werden deshalb endlich sein und sich im Mittel um eine Größe $\Delta\eta \geq \eta_0$ gruppieren. Wir haben es also im Prinzip immer mit einer praktischen Stabilität gegenüber endlichen Störungen zu tun — wobei als kleinste Maßstabseinheit dafür die Größe η_0 dient — und nicht mit einer mathematischen gegenüber infinitesimalen.

Zusammenfassend bemerken wir, daß das bis hierher vorgelegte kontinuierliche System die Struktur eines Regelkreises mit Störeingang hat. Von den primitiven Regelkreisen der Technik unterscheidet es sich aber in verschiedenen Punkten: 1. der Sollzustand ist nicht durch eine statische Größe gegeben sondern durch eine Form der Bewegung, die sich innerhalb einer gewissen Zeitdauer τ_m abspielt; man kann daher nicht streng von einem momentanen Sollzustand sprechen. 2. Die Bindung an den Sollzustand ist nicht mechanistischer Natur in dem Sinne, daß S_1 den Punkt O in jedem Falle und dann gezielt nach einem festen Zeitgesetz dem Minimum zuführen muß. Es ist blind in bezug auf seine Situation, hat dafür aber die Möglichkeit, spontan herumzusahnen und spontan auf eine andere — ideelle — Führungsfläche zu schalten. Dem entsprechend kann man Lage und Geschwindigkeit der Punkte des φ -Raumes niemals absolut genau sondern immer nur mit Wahrscheinlichkeit voraussagen.

Bis hierher haben wir nur eine einzige isolierte Zelle (Körper) von zunächst beliebiger Gestalt betrachtet. Wegen ihrer unendlich vielen x_T -Freiheitsgrade stellt sie offenbar für sich allein schon ein kontinuierliches System dar. Wir haben es beim Übergang der ersten Art durch Aneinanderreihung von Punkten gewonnen. Nunmehr gehen wir dazu über, einen Übergang zweiter Art zu einem Kontinuum zu vollziehen. Dabei stehen uns verschiedene Möglichkeiten offen. Die erste knüpft an den Weg an, auf dem man vom Bild des festen Körpers zu dem Bild der Atome gelangt und von da wieder zurück zum Bild der materiellen Körper.

Bekanntlich setzt man, wie es der primitive Augenschein zeigt, den festen Körper zunächst als strukturlos voraus, zerschneidet ihn mit einer imaginären Schere deshalb auch ohne Methode in immer kleinere Stücke, nimmt a priori, ohne vorher zu begründen weshalb, an, daß man dabei an einen „Punkt“ kommt, der ausdehnungslos und daher gestaltlos und unteilbar ist; darnach fügt man die an sich unveränderlich existierenden Punkte, jetzt aber wie einzelne Sterne durch leere Zwischenräume voneinander getrennt, zu einem mehr oder weniger dichten Sternhimmel von Massenpunkten (Kontinuum) zusammen. Der feste Körper ist darnach — im Widerspruch zur anfänglichen Annahme — strukturiert. Diesem Vorgehen ohne Kritik und weiteres Nachdenken entsprechend, hätten wir hier eine größere Zelle in beliebig kleine Stücke zu zerschneiden und die letzten nicht mehr teilbaren Stücke, genau wie die Massenpunkte eines vom anderen durch leeren Raum getrennt, mehr oder weniger dicht zu packen. In dem Bild des so gewonnenen Kontinuums stände keine Elementarzelle mit einer andern in irgend einem Kontakt, es sei denn, sie berührten sich gerade durch Stoß, oder man setzte eine Wirkung in die Ferne durch den leeren Raum voraus. Offenbar ist dieses ganze Vorgehen von Anfang an mit einem inneren Widerspruch behaftet und daher erkenntniskritisch unhaltbar. Vor allem aber bedarf es zusätzlicher Hypothesen, um erklären zu können, wie die Zellen in die Ferne über den leeren Raum hinweg und dann so aufeinander wirken können, daß koordinierte, durch Gesetze erfassbare Bewegungen zustande kommen. Wir gehen deshalb auf diese erste Möglichkeit, zu einem Bild eines Kontinuums zu gelangen, gar nicht weiter ein, sondern wenden uns dem zweiten Weg zu, den wir dann eingehender verfolgen wollen. Er lehnt sich an Beobachtungen bei materiellen Gebilden an — stützt sich also nicht auf einen Gedankenversuch an einem nachträglich als Fiktion erklärten System, den im übrigen noch kein Mensch ausgeführt hat —.

Wir beginnen mit biologischen Systemen. Wie ihre Untersuchung zeigt, weisen sie in ihrem Innern ein zusammenhängendes Gewebe von Zellen auf, von denen jede ein im gewissen Umfange abgeschlossenes Ganzes bildet. Auch an flüssigen und gasförmigen kontinuierlichen Medien können wir dieselben Phänomene beobachten, sofern sie sich in einer mit elementaren Singularitäten (Quellen und Senken, Wirbeln, Bjerknesschen Pulsatoren und Oszillatoren) behafteten

⁵⁾ Siehe auch H. St. Stefaniak, Über dynamische und energetische Stabilität und ihre Bedeutung für das Turbulenzproblem, ZAMM 38 (1958), S. 328, und: Zur Stabilität der ausgebildeten laminaren Rohrströmung bei höheren Reynoldszahlen, Sonderdruck VDI-Berichte Bd. 3 (1955).

strömenden Bewegung befinden. In vollständiger Berücksichtigung dieser Tatsachen setzen wir als Analogfall im folgenden deshalb von Anfang an das Vorhandensein einer zellenförmigen Struktur voraus, wobei die Zellbildung das Ergebnis eines Effektes darstellt, der durch Überlagerung von den durch die einzelnen elementaren Singularitäten definierten Bewegungen eines ganzen, unendlich ausgedehnten Kontinuums zustandekommt. Im Innern der Zellen findet daher eine mehr oder weniger geordnete Bewegung — etwa periodischer Natur und mit zyklischen Koordinaten — statt. Wir dürfen daher ein größeres Gebilde der angenommenen Art gar nicht beliebig zerschneiden, sondern müssen, um zu den letzten Bausteinen zu gelangen, das Bauwerk (Körper) entsprechend seiner inneren Struktur — die der Ausfluß eines bestimmten, noch aufzufindenden Bauplanes ist — abtragen, indem wir die Einheiten höherer Ordnung in Einheiten niedriger Ordnung auflösen. Was bleibt dann als letzte Einheit übrig und wodurch ist sie definiert? Diese Frage können wir nicht allein im Hinblick auf den φ -Raum beantworten, notwendig müssen wir dazu noch die Gegebenheiten des mit ihm verbundenen ψ -Raumes hinzunehmen⁶⁾. Sie muß deshalb anders gestellt werden, etwa so: Was empfinden S_1 und S_3 noch als letzte Einheit und wodurch ist sie ausgezeichnet? Offenbar können es nur die Merkmale: Gestalt der Zelle und die Form der Bewegung der Punkte am Rande und in ihrem Innern sein und zwar diejenigen, die von S_1 wegen seines endlichen Empfindlichkeitspegels η_0 und seines endlichen Gedächtnisses gerade noch als solche empfunden werden. Das Elementarsystem hat also die Attribute: elementare Gestalt im Raume und elementare Bewegung in der Zeit, elementares Gedächtnis und elementare Unempfindlichkeit. Aber selbst im Hinblick auf die beiden ersten Punkte können wir die Elementarzelle im Verband der sie umgebenden nicht als letztes unveränderliches Gebilde ansehen. Genau so, wie eine Zellularströmung — wie jede andere Bewegungsform einer wirklichen Flüssigkeit oder eines wirklichen Gases auch — nur eine begrenzte Stabilität aufweist und sich bei Vorliegen dynamischer oder energetischer Instabilität zu anderen Konfigurationen umbildet, müssen wir hier die Möglichkeit des Auftretens einer gleichartigen Erscheinung voraussetzen. Sie wird begründet in der Annahme, daß das Vorhandensein bestimmter Gestalten der Zelle und permanenter Bewegungsabläufe der Zellpunkte — im Phasenraum als Einheit betrachtet — von S_1 als besonders angenehm im Vergleich zu Nachbarformen empfunden werden. Sie sind im ψ -Raum durch die Lage der einzelnen Minima der Führungsfläche mit verschiedenem Niveau gegeben. Überspringt S_1 mit seinem Tastpunkt O bei einem seiner selteneren besonders weiten Tastschritte ein nicht allzu hohes Maximum, so gelangt es im ψ -Raum plötzlich in eine neue Lage und stellt gleichzeitig im φ -Raum eine andere Konfiguration ein. Die einzelnen Konfigurationen sind daher nicht ein- für allemal unabänderlich festliegend, sondern weisen demnach schon eine gewisse innere Instabilität auf. Sie wirkt sich durch das Vorhandensein des endlichen Empfindungspegels und durch die eigentümliche Tendenz von S_1 , ständig umherzusuchen, auch praktisch in Gestalt einer begrenzten Lebensdauer aus. Infolge dieser dem System innewohnenden inneren Unruhe weisen die Bewegungen der Zelle im φ -Raume neben einer geordneten Bewegungsform schon von sich aus immer noch eine mehr oder weniger ins Gewicht fallende ungeordnete Komponente auf.

Gehen wir nun dazu über, im φ -Raume nach einem bestimmten Bauplan eine Elementarzelle an die andere zu einem Kontinuum anzufügen, so gelangen wir schließlich zu dem Bilde eines Kontinuums, das nicht nur im φ -Raum sondern auch im Phasenraume eine zellgewebeartige Struktur wie ein Schaum aus Seifenblasen aufweist. Dieses Medium und seine Struktur existieren aber nicht für sich selbst im φ -Raume (oder Phasenraume), sondern jedem seiner N Elemente sind Systeme S_{3N} und S_{1N} zugeordnet, welche die Struktur als Architektur im Phasenraume passiv empfinden, werten und gegebenenfalls sie aktiv verändern. Infolge dieser zweifachen Verbindung müssen wir daher bei diesem Übergang gleichzeitig vor allem mit angeben, wie die Steuerung der Bewegung der gemeinsamen Trennwände H_{KL} zweier sich berührender Zellen K und L (Bild 4) durch ihr zugehöriges System S_{1K} bzw. S_{1L} stattfindet. Hier können wir etwa voraussetzen (Bild 4), daß die Wirkungen der X_{iK} - und X_{iL} -Verschiebungen unabhängig voneinander existieren und am Ausgang w des allen N Elementen gemeinsamen System S_2 linear überlagert werden. Erst auf diesem Wege beeinflußt jede Zelle mechanisch die ihr benachbarten: ändert beispielsweise Zelle K spontan Form und Bewegungszustand der Punkte ihrer ganzen Zelle etwas ab, so bedeutet dies im allgemeinen eine erzwungene Änderung derselben Dinge der angrenzenden Zelle L , weil eine Deformation der gemeinsamen Zellwand H_{KL} beide Elemente gleichzeitig betrifft. Auf dem Wege über S_3 wird dies S_{1L} durch Veränderung der Führungsfläche F_L angezeigt. Empfindet S_{1L} diese Störung, so reagiert es im allgemeinen auf dem Wege über S_2 durch Deformation seiner sämtlichen Zellwandungen also auch von H_{KL} . Möglicherweise wirkt L dadurch einerseits auf K wieder zurück und regt andererseits in gleicher Weise alle benachbarten Zellen zu Reaktionen u.s.f. an. Möglicherweise sagten wir, denn eine Ausbreitung einer lokalen Störung geschieht natürlich erst dann, wenn die Änderungen den Empfindungspegel η_0 eines Elementes der an-

⁶⁾ Daß dieser Raum existiert, sind wir auf Grund der Eigenbeobachtung absolut sicher.

grenzenden Umgebung überschreiten. Durch dessen Vorhandensein ist eine Zelle gegen schnell vorübergehende, kleinere Störungen durch sie umgebende in einem gewissen Umfange geschützt, und so erst bildet sie ein stabiles System für sich allein. Die Annahme der Existenz des Empfindungspegels ist also für die Bildung des Begriffes Elementarsystem von grundlegender Bedeutung.

In diesem Bilde ist das kontinuierliche Zellsystem auf das vielfältigste gegenseitig ringförmig verkettet. Eine mechanische Ausbreitung einer durch S_1 verursachten kleinen Störung oder eines Signals auf weiter entfernte Rauteile geschieht darin nicht unvermittelt und momentan, sondern verläuft durch Mittel in zwei verschiedenen Räumen von einer Zelle zur anderen und bedarf wegen der endlichen Reaktionszeit von S_1 auch einer gewissen Zeit. Im allgemeinen wird das ganze System in allen Räumen hin- und herwogende Bewegungen ausführen, sich umbilden, ohne daß es je zu einer größeren und permanenten Ordnung kommt. Nur in besonderen Fällen werden etwa die eine einzige Zelle oder Zellgruppe konstituierenden Bewegungen eine gewisse Zeit sich dauernd selbst erhalten und stationär sein, nämlich dann, wenn sie eine gewisse elementare Ordnung aufweisen bzw. die einzelnen Ordnungen sich zu einer Ordnung von höheren Graden zusammenfügen. Der Zustand einer solchen Eigenbewegung wird dann einem Optimum nach allen Koordinaten für alle beteiligten S_1 entsprechen. Er wird sich also als stabil erweisen sowohl gegenüber den inneren Störungen in Gestalt der unregelmäßigen Suchbewegungen des Systems als auch in gewissem Umfange gegenüber den äußeren — geordneten oder ungeordneten — der benachbarten Zellen. Wegen dieser Formstabilität infolge eines Bewegungszustandes können wir — im Sinne der in der Einleitung erwähnten Vorstellung des Strömungsmechanikers — die Existenz dieser geordneten Eigenbewegungen als identisch mit dem Vorhandensein von Materie im Zustand einfachster Ordnung, also von Materieelementen deuten.

So gesehen, ist es dann keine Schwierigkeit mehr sich abzuleiten, wie die Struktur von angeregten Zuständen sowie die von Elementen höherer Ordnung aussieht, und wie sich die Umwandlung der Elemente und Aggregatzustände ineinander vollzieht, nämlich durch aktive Umwandlung einer Bewegungsform in eine andere. Geht man davon aus, daß für alle Bereiche materieller Gebilde, dieselben Zusammenhänge gelten, und daß sich das Geschehen einheitlich, d. h. nach denselben Gesetzmäßigkeiten vollzieht, dann kann demnach schon allein die Untersuchung der Strömungsphänomene insbesondere des Phänomens der laminaren und turbulenten Bewegung zu einer vertieften Anschauung über das Geschehen in elementaren Bereichen führen und umgekehrt; außerdem ist das Auftreten dimensionsloser Kennzahlen zu erwarten, welche allen Bereichen gemeinsam sind.

Was abschließend die Begriffe und Größen anlangt, die bei der vollständigen Beschreibung der Vorgänge primär gebraucht werden, so erkennt man, daß es nicht genügt, allein die im φ -Raum feststellbaren Größen Raum und Zeit zu verwenden, man muß notwendig auch die für S_1 und S_3 eine Rolle spielenden Gegebenheiten mit hinzunehmen. Demnach benötigt man hierzu insgesamt die Größen 1. des φ -Raumes, 2. der Zeit und 3. der Empfindungen im ψ -Raum. Als ihre natürlichen elementaren Maßstabseinheiten bieten sich an: 1. die kleinste charakteristische Abmessung l_0 der Zelle, deren Gestalt S_1 und S_3 noch als solche empfinden, 2. die kleinste Zeit τ_0 oder τ_m , innerhalb deren sich S_1 noch an ein vorhergehendes Ereignis erinnern kann, bzw. innerhalb der eine ablaufende Bewegung von S_3 noch als Einheit empfunden wird, und 3. die kleinste Empfindungsschwelle η_0 .

Anschrift: Prof. Dr. H. St. Stefaniak, München 13, Görresstr. 24

Die Existenz und Stabilität der periodischen Lösung 2. Art eines mechanischen Systems

Von Otto Vejvoda

Das Referat war eine kurze Übersicht der Resultate eines Artikels über diese Frage, der in der Zeitschrift Czechoslovak Math. Journal 3 (1959) erscheinen wird.

Es sei das System

$$\begin{aligned}\ddot{x} + x &= \varepsilon f(x, \dot{x}, \varphi, \dot{\varphi}, \varepsilon), \\ \ddot{\varphi} &= \varepsilon M(\dot{\varphi}) + \varepsilon^2 g(x, \dot{x}, \varphi, \dot{\varphi}, \varepsilon)\end{aligned}$$

gegeben, wo die Funktionen f und g periodisch in der Veränderlichen φ mit der Periode 2π sind und die Funktionen f , g und M samt ihrer partiellen Differentialquotienten 1. Ordnung in bezug auf die Veränderlichen x , \dot{x} , φ und $\dot{\varphi}$ in den Veränderlichen x , \dot{x} , φ , $\dot{\varphi}$ und ε für x , \dot{x} , φ und $\dot{\varphi}$ in einem gewissen Gebiet des $(x, \dot{x}, \varphi, \dot{\varphi})$ -Raumes und für $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ stetig sind.

Es werden die Bedingungen für die Existenz einer Lösung von der Form $x = x(t, \varepsilon)$, $\varphi = \omega(\varepsilon) t + \varepsilon \Phi(t, \varepsilon)$ untersucht, wobei $x(t, \varepsilon)$ und $\Phi(t, \varepsilon)$ periodisch in t mit der Periode $T(\varepsilon) = \frac{2\pi N}{\omega(\varepsilon)}$ (N ist eine natürliche Zahl) sind.

Die Bedingungen für die Stabilität einer solchen Lösung sind mit Hilfe einer Verallgemeinerung des *Andronov-Vittschen* Satzes abgeleitet.

Anschrift: Dr. O. Vejvoda, Prag XIX, Jaselska 7

C. ELASTIZITÄT UND PLASTIZITÄT

Die Abhängigkeit der Lösung der Elastizitätsprobleme von kleinen Veränderungen des Definitionsgebietes

Von Ivo Babuška

Unter dem Begriff der korrekten Problemstellung einer Differentialgleichung werden heute allgemein folgende drei Bedingungen verstanden:

1. Die Lösbarkeit des Problems.
2. Die Eindeutigkeit der Lösung.
3. Die stetige Abhängigkeit von den Rand- resp. Anfangsbedingungen.

Aus denselben Gründen, die für die dritte Bedingung sprechen, ist es zweckmäßig, noch zwei weitere in Erwägung zu ziehen:

4. Die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Koeffizienten der Gleichung.
5. Die stetige Abhängigkeit der Lösung von kleinen Veränderungen des Definitionsgebietes.

Wir führen hier einige spezielle Ergebnisse einer allgemeiner bearbeiteten Theorie über die Stabilität der Definitionsgebiete an, die Fragen der 5. Bedingung für elliptische Differentialgleichungen löst. Wir werden uns hier nur auf das erste Problem der linearen mathematischen Elastizitätstheorie beschränken (d. h. auf das Problem des Spannungszustandes eines Körpers, wenn auf dem Rand die Verschiebungen vorgeschrieben sind) und auf die Probleme der Platten-theorie. Im ersten Fall handelt es sich um stark elliptische Systeme von Differentialgleichungen zweiten Grades und im zweiten um das biharmonische Problem.

Ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset E_n$, $n = 2, 3$ (d. h. eine zusammenhängende offene Menge) nennen wir ein normales Gebiet, wenn $\mathfrak{F}\Omega = \mathfrak{F}(C\bar{\Omega})$ gilt, wo $\mathfrak{F}\Omega$ der Rand des Gebietes Ω ist und $C\bar{\Omega}$ das Komplement des Abschlusses des Gebietes Ω . Wir werden im Weiteren nur normale Gebiete in Betracht ziehen.

I. Das erste Elastizitätsproblem

Es sei eine Vektorfunktion $u = (u_1, \dots, u_n)$ mit allen ihren Ableitungen in ganz E_n definiert. Es sei weiter Ω_k^j , $k = 1, 2, \dots$; $j = 1, 2$ eine solche Folge von Gebieten mit glattem Rand, daß

$$\Omega_k^1 \subset \Omega_{k+1}^1 \subset \Omega; \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k = \Omega$$

und

$$\Omega \subset \Omega_{k+1}^2 \subset \Omega_k^2, \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} \Omega_k = \Omega$$

gilt. Es seien weiter $v_k^{(j)} \equiv (v_{1,k}^{(j)}, \dots, v_{n,k}^{(j)})$ die Lösungen des ersten Elastizitätsproblems auf Ω_k^j , wenn auf $\mathfrak{F}\Omega_k^j$ die Verschiebungen durch die Funktionen $u \equiv (u_1, \dots, u_n)$ gegeben sind. Dann gilt $v_k^j \rightarrow v^j$ (im Sinn der Energie). Dabei hängt v^j nicht von der Folge der Gebiete Ω_k^j ab. Es hängt nur von Ω und der Funktion u auf $\mathfrak{F}\Omega$ ab.

Die Funktion $v^{(1)}$ resp. $v^{(2)}$ nennen wir die innere resp. äußere Lösung. Ein Gebiet Ω nennen wir stabil, wenn für jedes u (mit allen stetigen Ableitungen) $v^{(1)} = v^{(2)}$ gilt. Im entgegengesetzten Fall sagen wir, daß Ω unstabil ist.

Wenn Ω stabil ist, so hat eine kleine Veränderung des Definitionsgebietes nur eine kleine Veränderung (Fehler) der Lösung zur Folge.

Es existieren in E_3 und E_2 instabile Gebiete, deren Rand eine endliche Fläche resp. von endlicher Länge ist. In E_3 kann dieses Gebiet auch ein zusammenhängendes Komplement haben. In E_2 ist jedes *Caratheodorysche* Gebiet stabil.

Ein Gebiet ist für einen anisotropen nicht homogenen Körper dann und nur dann stabil, wenn es für einen isotropen homogenen Körper und die *Poissonsche* Konstante gleich Null stabil ist.

Wenn in jedem Randpunkt des Ω der Rand lokal als Funktion von $n - 1$ Veränderlichen ausgedrückt werden kann, so ist das Gebiet Ω stabil.

II. Das Problem der Plattentheorie

Unterscheiden wir drei Arten von Plattenlagerung.

- A) Die eingespannte Platte.
- B) Die freigelagerte Platte.
- C) Die freie Platte.

Für die Fälle A) und C) gelten im gewissen Sinn ähnliche Schlußfolgerungen wie für das erste Elastizitätsproblem, vor allem diejenige, daß ein Kreis ein stabiles Gebiet ist.

Für den Fall B) existiert weder eine innere noch eine äußere Lösung. Wenn z.B. u_n die Durchbiegung einer gleichmäßig belasteten freigelagerten Platte von der Form eines regelmäßigen n -Ecks sind, und wenn diese n -Ecke zu einem Kreis mit dem Radius R konvergieren, so ist $u_n \rightarrow \bar{u}$ und $\bar{u} \neq u$, wo u die Durchbiegung der freigelagerten gleichmäßig belasteten kreisförmigen Platte mit dem Radius R ist. Wenn die *Poissonsche* Konstante $\nu = 0$ ist, dann ist im Mittelpunkt der Platte $\bar{u} = \frac{32 R^3}{64 D}$ und $u = \frac{52 R^3}{64 D}$.

Die Stabilitätstheorie, wie wir sie hier in sehr kurzer Form angeführt haben, hängt zum Beispiel mit einer Reihe sehr interessanter Probleme aus der Approximationstheorie zusammen und findet verschiedene Anwendungsmöglichkeiten in den numerischen Rechenmethoden.

Anschrift: Dr.-Ing. I. Babuška, Prag 6, Glinkova 10

Über eine Erscheinung der Häufung und der Spiegelung bei Reziprozitäten

Von W. Biermann

Der Verfasser möchte über eine bemerkenswerte Erscheinung berichten, die bei gewissen geschlossenen Systemen auftreten kann, wenn diesen ein besonderer Richtungscharakter eigen ist. Es zeigt sich, daß z.B. Trägerroste mit rechtwinklig sich kreuzenden Stäben auch bei stabweise unterschiedlichen Abständen die Eigenschaft besitzen, daß beim Einwirken von Kräften in den Kreuzungspunkten die bekannten Maxwellschen Beziehungen nicht nur an den Krafteinleitstellen, sondern auch an bestimmten anderen Kreuzungsstellen auftreten können, wenn diesen Stabsystemen durch einfache Forderungen über den Steifigkeitsverlauf eine kleine Besonderheit gegeben wird, die ihnen gewissermaßen eine noch nicht bekannte Orthogonalisierung verleiht. Diese Erscheinungen können in ähnlicher Form auch in ebenen Traggebilden auftreten, die durch Kräfte und Momente belastet werden.

Weiterhin wird gezeigt, daß bei Vorhandensein einer Systemsymmetrie im üblichen Sinne die vorher erwähnten mehrfach auftretenden reziproken Beziehungen sich nochmals spiegeln können. Das mehrfache Auftreten der reziproken Beziehungen kann zur Folge haben, daß bei verschiedenen Belastungseinheiten zugeordnete Stäbe gleich belastet und verformt werden.

Es kann nachgewiesen werden, daß bei Stabwerken mit senkrecht sich kreuzenden Stäben eine Häufung der bekannten Maxwellschen Beziehungen eintritt, wenn der Steifigkeitsverlauf der Horizontalstäbe für sich und ebenso der Steifigkeitsverlauf der Vertikalstäbe der gleiche ist.

Der Beweis hierfür bleibt einer späteren Veröffentlichung vorbehalten.

Nachstehend sind zwei durchgerechnete Beispiele wiedergegeben, die die erwähnte Tatsache bestätigen.

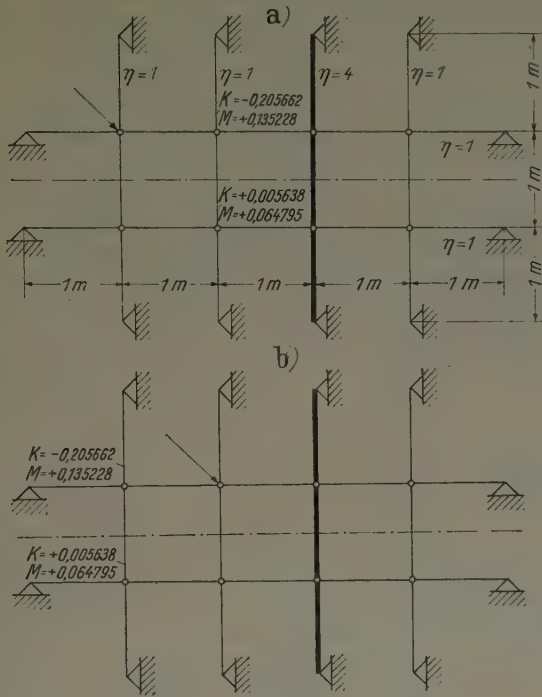


Bild 1

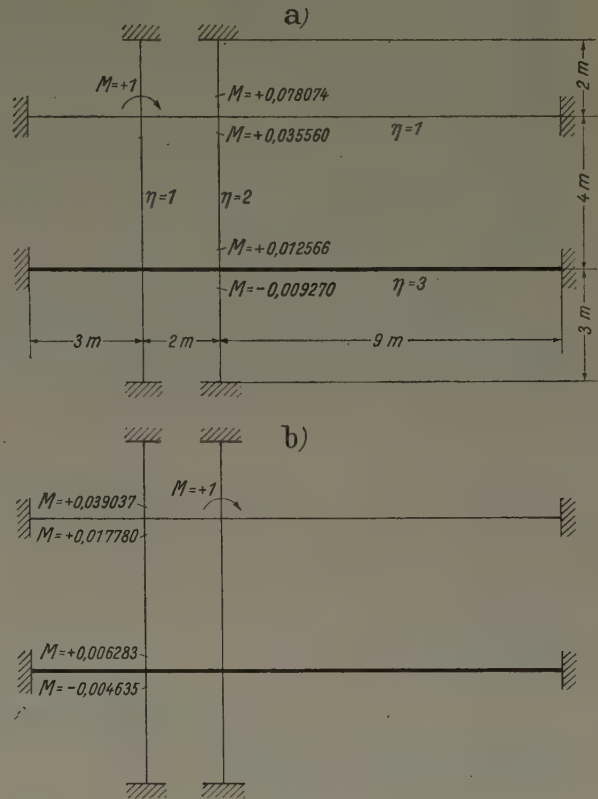


Bild 2

Anschrift: Prof. Dr.-Ing. W. Biermann, Warnemünde, Parkstr. 23

Zur Integration der Differentialgleichungen für dünne elastische Kreiszyinderschalen auf mehreren Stützen

Von A. Kuhelj

Die Biegetheorie offener Zylinderschalen mit Zwischenstützen ergibt ziemlich unübersichtliche Ausdrücke, wenn auch Glieder höherer Ordnung berücksichtigt werden. Um bei allen geometrischen und statischen Größen zu einfachen Gleichungen zu kommen, wird die Schalendicke h gegenüber dem Krümmungshalbmesser R der Schalenmittelfläche vernachlässigt und für die drei Verschiebungskomponenten u, v, w der Mittelfläche in Richtung der Erzeugenden, der Leitlinie bzw. der Innennormale findet man dann folgende Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{X}{D} &= 0, \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial(w/R)}{\partial y} + \frac{Y}{D} &= 0, \\ \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} - k^2 R \Delta w + R \frac{Z}{D} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

mit den üblichen Bezeichnungen für die Lastkomponenten X, Y, Z , die Dehnsteifigkeit D und die Biegesteifigkeit $K = k^2 \cdot D$, während sich für die Krümmungsänderungen der Mittelfläche folgende vereinfachte Ausdrücke

$$\kappa_x = \partial^2 w / \partial x^2, \quad \kappa_y = \partial^2 w / \partial y^2, \quad \lambda = \partial^2 w / \partial x \partial y \dots \dots \dots (2)$$

ergeben.

Die Verschiebungen einer jeden Teilschale zwischen zwei benachbarten Endstützen lassen sich nun in drei Anteile zerlegen, von denen der erste einer partikulären Lösung der Gleichungen (1) entspricht, während die anderen zwei als unendliche Summen von Lösungen des zugeordneten homogenen Systems mit trigonometrischen Funktionen in der ersten bzw. der zweiten unabhängigen Veränderlichen dargestellt werden können. Die Koeffizienten der Summenglieder für die zwei letzten Anteile in den Ausdrücken für u und v lassen sich dabei übersichtlich durch entsprechende Größen für die Verschiebung w ausdrücken, so daß diese bei gegebenen Abmessungen und Lasten nur noch von Randbedingungen abhängen. Die Wahl der trigonometrischen Funktionen in den letzten zwei Anteilen für Verschiebungen erfolgt bei Teilschalen auf Endstützen aus Zweckmäßigkeitsgründen so, daß der erste den Verschiebungen einer Schale mit biegungsfreier Auflagerung längs zweier Leitlinien, der zweite aber einer ebensolcher Lagerung längs zweier Erzeugenden entspricht.

Bei Beschränkung auf Kreiszyinderschalen können für den ersten und zweiten Anteil teilweise schon vorhandene Formeln und Tabellen, wie z.B. die von Rüdiger-Urban, verwendet werden. Den letzten Anteil für die Verschiebungskomponenten kann man in der Form

$$\left. \begin{aligned} u_3 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^8 A_{nj} e^{\lambda_{nj} x} \sin \mu_n y, \\ v_3 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^8 B_{nj} e^{\lambda_{nj} x} \cos \mu_n y, \\ w_3 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^8 C_{nj} e^{\lambda_{nj} x} \sin \mu_n y \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3).$$

darstellen, wobei bei gegebenem $\mu_n = n\pi/b$ (b = Schalenbreite) die komplexen Größen λ_{nj} aus der Gleichung

$$(1 - \nu^2) \lambda_{nj}^4 + k^2 R^2 (\lambda_{nj}^2 - \mu_n^2)^2 = 0 \dots \dots \dots (4)$$

ohne Schwierigkeiten berechnet werden können. Für die Konstanten A_{nj} , B_{nj} , C_{nj} ergeben sich weiter folgende Beziehungen

$$A_{nj} = \frac{\nu \lambda_{nj}^2 + \mu_n^2}{(\lambda_{nj}^2 - \mu_n^2)^2} \frac{\lambda_{nj}}{R} C_{nj}, \quad B_{nj} = \frac{(2 + \nu) \lambda_{nj}^2 - \mu_n^2}{(\lambda_{nj}^2 - \mu_n^2)^2} \frac{\mu_n}{R} C_{nj} \dots \dots \dots (5).$$

Die Bestimmung der komplexen Integrationskonstanten C_{mj} und C_{nj} für den zweiten und dritten Anteil ergibt sich verhältnismäßig einfach, wenn auf jedem Rande der Teilschale vier von den acht geometrischen und statischen Größen fest vorgeschrieben sind, weil dann längs jeden Randes die Integrale der Fehlerquadrate für jede dieser Größen ihr Minimum erreichen sollen. Im entgegengesetzten Falle ist wie bei statisch bzw. geometrisch unbestimmten Gebilden zu verfahren, indem man vier Größen als Unbestimmte annimmt und deren Werte dadurch ermittelt, daß die Integrale des Differenzenquadrates für die anderen vier Größen zu einem Minimum gemacht werden.

Literatur

- [1] Girkmann, K.: Flächentragwerke, 3. Aufl. Wien 1954, S. 464 ff.
- [2] Kuhelj, A., Beitrag zur Elastizitätstheorie der Schalen. Vorbericht, IV. Kongr. d. Int. Vereinig. f. Brücken- und Hochbau, Cambridge 1952, S. 207—211.
- [3] Rüdiger, D. und Urban, J.: Kreiszyinderschalen. Leipzig 1955.

Anschrift: Prof. Dr. A. Kuhelj, Ljubljana, Zupanciceva 10, Jugoslawien

Der lange, dünne Stab unter konservativer Längskraft und Torsion

Von H. Leipholz

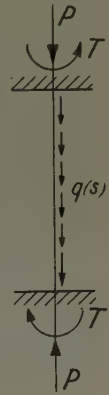
In einer ganzen Anzahl moderner Arbeiten ist das Problem des langen, dünnen Stabes unter Längskraft und Torsion als Stabilitätsproblem für spezielle Last- und Lagerungsfälle in voneinander unabhängigen Einzelarbeiten bereits gelöst worden.

In dieser Betrachtung soll versucht werden, das Problem in allgemeiner Form und mit einer umfassenden Methode darzustellen, so daß sich die verschiedenen in den einzelnen Arbeiten berücksichtigten Lastfälle nur noch als Sonderfälle dieser allgemeinen Betrachtung ergeben.

Es möge sich um einen lotrechten Stab handeln, der an seinen Enden in einer mit dem konservativen Charakter der Belastung verträglichen Weise gelagert, z. B. an beiden Enden eingespannt ist. Er sei auf Druck belastet durch eine Einzelkraft P , die auf die Stabenden wirkt, sowie durch eine lotrechte Belastung q , die nach einem bekannten Gesetz $q(s)$ kontinuierlich als Funktion von s über die Stabachse verteilt ist. s ist dabei die Länge der Stabachse, vom unteren Stabende an gezählt.

Ferner sei der Stab noch belastet durch ein Torsionsmoment T , das wie P an den Stabenden angreift.

Durch Anwendung der Gleichgewichtsmethode auf das herausgeschnittene Stabelement erhält man die Kirchhoff-Clebschen Gleichungen und nach Einführung eines lotrechten Einheitsvektors e , der in bezug auf das HAS¹⁾ die Komponentendarstellung e_ξ, e_η, e_ζ hat, und Durchführung von gewissen Vereinfachungen die Grundgleichungen als gekoppeltes Differentialgleichungssystem 2. Ordnung. Die Gleichungen des Systems sind im allgemeinen inhomogen. Da ihr homogener Teil für die Lösung des Problems aber am wesentlichsten ist, sollen im folgenden nur die homogenen Gleichungen betrachtet werden! Bei Berücksichtigung von q lauten sie:



$$\left. \begin{aligned} a \ddot{e}_\eta + [(a+b)(\varepsilon + \tau_0) - c\varepsilon] \dot{e}_\xi + \left[-b(\varepsilon + \tau_0)^2 + c\varepsilon(\varepsilon + \tau_0) + P + \int_s^l q(s) ds \right] e_\eta &= 0 \\ b \ddot{e}_\xi - [(a+b)(\varepsilon + \tau_0) - c\varepsilon] \dot{e}_\eta + \left[-a(\varepsilon + \tau_0)^2 + c\varepsilon(\varepsilon + \tau_0) + P + \int_s^l q(s) ds \right] e_\xi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1).$$

Die in den Gleichungen vorkommenden Buchstaben und Symbole haben folgende Bedeutung:

- \cdot = Differentiation nach s
- a, b = Biegesteifigkeiten des Stabes
- τ_0 = spannungslose Vorverwindung pro Längeneinheit des Stabes
- τ = Verdrillung pro Längeneinheit des Stabes
- $\varepsilon = \tau - \tau_0$
- P = Einzeldruckkraft an den Stabenden
- q = kontinuierlich verteilte Belastung
- $T = c \cdot \varepsilon$ = Torsionsmoment
- s = laufende Achslänge
- l = gesamte Achslänge des Stabes.

Die Differentialgleichungen sind unter Beachtung von Randbedingungen zu lösen, so daß man eine Eigenwertaufgabe hat.

Durch Spezialisierung der Parameter des Systems erhält man die verschiedenen zum Teil bisher schon behandelten Stabprobleme und Belastungsfälle.

1. $a = b$ Stab mit quadratischem oder Kreisquerschnitt
2. $\tau_0 \neq 0$ der verwundene Stab
3. $c\varepsilon \neq 0$ Stab mit Torsionsmoment an seinen Enden belastet
4. $q = 0$ Stab, dessen Drucklast nur aus der Einzelkraft an den Stabenden besteht
5. $q \neq 0$ Stab, der auch durch kontinuierlich verteilte Druckkräfte belastet ist.

Unter Einführung von Abkürzungen und Durchführung einer Koordinatentransformation läßt sich das System auf eine andere Gestalt bringen:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{e}_\eta + 2u \dot{e}_\xi - u^2 e_\eta &= \sigma(s) e_\eta \\ \ddot{e}_\xi - 2u \dot{e}_\eta - u^2 e_\xi &= \psi(s) e_\xi \end{aligned} \right\} \quad \text{Dabei sind:} \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma(s) &= \text{const} - \frac{1}{a} \int_s^l q(s) ds \\ \psi(s) &= \text{const} - \frac{1}{b} \int_s^l q(s) ds \end{aligned} \right. \quad \dots \quad (2).$$

Im Falle $q = 0$ sind σ und ψ ebenfalls konstant. Man kann dann für das System 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten leicht die allgemeine Lösung mittels Exponentialansatz finden. Sie baut sich aus trigonometrischen oder Hyperbelfunktionen auf.

Auf diesen Fall und diese Lösungen scheinen sich alle mir bekannten Arbeiten beschränkt zu haben.

¹⁾ HAS = Hauptachsensystem des Stabes

Will man auch für $q \neq 0$ zu einer Lösung kommen, scheint eine Analogiebetrachtung zweckmäßig.

Bekanntlich gestatten die *Kirchhoff-Clebsch*schen Gleichungen den Vergleich des Stabes mit dem Kreisel.

Nun ist man aber hinsichtlich des Stabes nicht bei den *Kirchhoff-Clebsch*schen Gleichungen stehengeblieben, sondern ist durch Vereinfachungen zu den Gleichungen (1) gekommen. Macht man beim Kreisel entsprechende Vereinfachungen, so läßt sich das Kreiselproblem zurückführen auf die Bewegung der Kreisel Spitze als Massenpunkt auf einer rotierenden Ellipsoid- oder Kugel- fläche. Den Stabgleichungen entspricht dann die Bewegung des Massenpunktes als kinetisches Analogon. Sie ist für $a = b$ im Fall $q = 0$ eine *Foucault*sche Pendelbewegung und im Fall $q \neq 0$ eine nichtharmonische Schwingungsbewegung auf einem Fahrstuhl, betrachtet in einem rotierenden Achsenkreuz.

Faßt man das System (2) als die Bewegungsgleichungen des Massenpunktes in dem mit der gleichförmigen Geschwindigkeit u rotierenden Achsenkreuz auf, so sieht man, daß der Massenpunkt unter der Wirkung einer Kraft \mathfrak{F} steht, deren Komponenten gerade die rechten Seiten der Gleichungen sind.

Führt man in dem beweglichen e_ξ, e_η -System noch Polarkoordinaten ein:

$$e_\xi = r \cos \varphi \quad e_\eta = r \sin \varphi ,$$

so kann man die Gleichungen (2) umformen zu:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} &= 0 & \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3).$$

Für den Massenpunkt würden das die *Lagrangeschen* Bewegungsgleichungen 2. Art sein. Dabei ist:

$$L = \frac{1}{2} [\dot{r}^2 + r^2 (u + \dot{\varphi})^2 + \psi r^2 \cos^2 \varphi + \sigma r^2 \sin^2 \varphi].$$

Die Differentialgleichungen des Stabes in der Form (3) scheinen geeignet zu sein für die Behandlung des Stabes im Fall $q \neq 0$.

Dies sei am Beispiel der geraden, glatten Welle mit quadratischem oder Kreisquerschnitt vorgeführt. Die Welle sei nicht verwunden und sie sei beansprucht durch ein Torsionsmoment $T = c \cdot \varepsilon$ und eine Druckkraft P an den Stabenden, sowie durch kontinuierlich und gleichmäßig über die Stabachse verteilte Druckkräfte q . In diesem Fall sind also:

$$a = b$$

und daher:

$$\sigma \equiv \psi.$$

Man sieht sofort, daß L dann frei von φ ist. φ ist also eine zyklische Variable und man kann das System (3) integrieren. Aus

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{folgt} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const}$$

und weiter noch $\varphi = u s$. Nachdem φ bekannt ist, läßt sich alles zurückführen auf eine Dgl. für r . Sie lautet:

$$\ddot{r} - \sigma(s) r = 0.$$

Sie soll die Basisgleichung des Problems heißen. Die beschreibt bei der kinetischen Analogie die Schwingungsbewegung des Massenpunktes auf dem Fahrstuhl r . Bei $q = 0$, also $\sigma = \text{const}$ ist es die Dgl. einer harmonischen Schwingung.

Im Fall $q \neq 0$ ist es die Dgl. einer nichtharmonischen Schwingungsbewegung.

Ihre Fundamentallösungen r_1, r_2 sind der Schlüssel zur Lösung des ganzen Problems. Mit ihnen und der schon bekannten Lösung von φ lautet die allgemeine Lösung von (3) in komplexer Schreibweise:

$$\varrho = e_\xi + i e_\eta = (\mathfrak{A} r_1 + \mathfrak{B} r_2) \cdot e^{-i u s}.$$

Der Charakter der Basisgleichung ist abhängig von der Funktion $\sigma(s)$. Diese wiederum wird, abgesehen von Konstanten, bestimmt durch die Art von $q(s)$.

Für $q(s) = 0$ erhält man als Lösung der Basisgleichung der bekannten Fälle Kreis- und Hyperbelfunktionen.

Für $q = \text{const}$ kann die Basisgleichung in eine *Besselsche* überführt werden, und ihre Fundamentallösungen enthalten im wesentlichen die Funktionen $J_{1/3}$ und $J_{-1/3}$.

Für $q = \text{const.}$ habe ich die Eigenwerte für eingespannte Stabenden bestimmt. Sind z.B. die Stabenden zudem noch querkraftfrei, so heißt die Eigenwertgleichung mit $f = f(s)$, einer bestimmten Funktion von s ,

$$J_{1/3}(f(0)) \cdot J_{-1/3}(f(l)) = J_{1/3}(f(l)) \cdot J_{-1/3}(f(0)).$$

Ihre Verwandtschaft mit der bekannten *Greenhillschen* Formel läßt sich nachweisen.

Abgesehen von diesem besonderen Fall mit $a = b$, wo sich eine Integration der Dgln. durchführen ließ, wird das allgemeinere Problem im Fall $a \neq b$ für die Lösung Schwierigkeiten bereiten. In der Form (3) scheinen mir aber die Dgl. auch dann einen Lösungsweg anzubieten:

Man fasse entsprechend dem Hamiltonschen Prinzip (3) als die Eulerschen Dgln. eines Variationsproblems auf.

Dann kann man statt (3) schreiben: $\int_0^l L(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}) ds = \text{Extremum}$ bei entsprechenden Randbedingungen für r und φ .

Da die Funktion L durch die Daten der Aufgabe festgelegt ist, könnte man durch Lösung des Variationsproblems mittels *Ritzansatzes* auf die Bestimmung der Eigenwerte hoffen.

Anschrift: Dipl.-Math. Horst Leipholz, Stuttgart-Untertürkheim, Fiechtnerstr. 51

Zur Theorie des Gesenkschmiedens

Von *Horst Lippmann*

Die elementare Theorie technischer Umformvorgänge geht auf Siebel und v. Kármán zurück und beruht im wesentlichen auf folgenden Voraussetzungen:

1. Der Werkstofffluß ist eben und wird nach oben und unten durch starre (i. a. gekrümmte) Wände begrenzt.

Ist x die (z. B. vom linken Ende des plastischen Bereiches aus gezählte) waagerechte Koordinate und y die senkrechte Koordinate, so bezeichne $y = h_0(x)$ die obere, $y = -h_u(x)$ die untere Begrenzungskurve in einer Fließebe. $h = h_0 + h_u$ gibt die Gesamthöhe an der Stelle x .

2. Überall an den genannten Begrenzungen herrscht *Coulombsche* Reibung.

μ sei der Reibungskoeffizient.

3. Die senkrechten und waagerechten (bei Druck positiv gezählten) Spannungskomponenten p, q sind Hauptspannungen und unabhängig von y .

4. Der plastische Zustand wird durch das *Trescasche* Fließkriterium beschrieben, wonach die maximale Schubspannung den (orts- und zeitabhängigen) Wert $\pm k$ hat.

Die elementare Theorie betrachtet einen festen Zeitpunkt und setzt k über y konstant, über x als bekannt (z. B. ebenfalls konstant) voraus. I. a. rechnet man mit der sog. Formänderungsfestigkeit $k_f(x) = 2k(x)$. Dann lautet das *Trescasche* Kriterium

$$p - q = k_f.$$

Man betrachtet das Gleichgewicht der Kräfte an einem Werkstoffstreifen $x = \text{const.}$, der Breite dx und der Höhe h . Dies führt zu einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung in p mit dem Integral

$$p(x) = \exp \int_x^b g(x) dx \left\{ k_f - \int_x^b \frac{(h k_f)'}{h} \left[\exp - \int_x^b g(x) dx \right] dx \right\},$$

wobei

$$g(x) = \frac{1}{h} \left[h' + \frac{2\mu(1 - h'_0 h'_u) - (1 - \mu^2) h'}{(1 + \mu h'_0)(1 + \mu h'_u)} \right],$$

$' = \frac{d}{dx}$, b = Gesamtbreite des Schmiedestückes einschl. der Grate.

Diese Form ist für $c \leq x \leq b$ gültig, wenn c die Abszisse der zunächst noch unbekannten Fließscheide darstellt.

Symmetrisches Vorgehen führt zu $p(x)$ für $0 \leq x \leq c$; $x = c$ bestimmt sich durch Gleichsetzen beider Ausdrücke für p . Nochmalige Quadratur liefert die Preßkraft P . Für einfache Begrenzungen erhält man geschlossene Gleichungen. Andernfalls ist numerische Auswertung möglich.

Als Beispiel dient eine rhombische Gravurform mit Grat (Gesamtbreite b ; Breite zwischen den Gratansätzen β ; maximale Höhe H ; Grathöhe δ). Wegen der Symmetrie liegt $c = b/2$ fest. Hier folgt interessanterweise als notwendige Bedingung für die Gültigkeit des elementaren Ansatzes eine Beschränkung für die Steilheit der Gravur:

$$\mu \frac{H - \delta}{\beta} < 1.$$

Dies unterscheidet vorliegende Methode prinzipiell von dem sonst ähnlichen Ansatz bei Hoffmann und Sachs (Introduction to the Theory of Plasticity; New York 1953). Bei sehr steilen Gravuren sei auf Ansätze von Kobayashi et al. (Trans. ASME, Papers no. 58-A-140 und 58-A-154 (1958)) verwiesen.

Eine ausführliche Darstellung erscheint in einem der ersten Hefte des Journal of the Mechanical Sciences.

Anschrift: Dr. H. Lippmann, Hannover-Döhren, Am Lindenhof 37

Beweis des St. Venantschen Prinzips

Von Matthias Matschinski

1. Die Grenzen des Anwendungsgebietes des St. Venantschen Prinzips sind bisher noch nicht eindeutig festgestellt. Es ist aber klar, daß die Erscheinungen der „linearen“ Elastizität jedenfalls innerhalb dieser Grenzen liegen. Unter der „linearen“ Elastizität versteht man hier, wie üblich, die Erscheinungen, deren mathematische Beschreibung mit dem Ansatz eines linearen Zusammenhanges zwischen den Spannungen X_{ij} und den Deformationen x_{ij} durchgeführt werden kann. Wie bekannt, sind in diesem Falle alle Spannungen und Deformationen durch biharmonische Funktionen darzustellen:

$$\Delta \Delta X_{ij} = 0, \quad \Delta \Delta x_{ij} = 0 \quad \dots \dots \dots (1).$$

Man sucht deshalb zuerst das St. Venantsche Prinzip als eine Eigenschaft der biharmonischen Funktionen festzustellen. Soweit jede biharmonische Funktion einen elastischen Zustand beschreiben kann, muß jede solche Funktion die dem St. Venantschen Prinzip entsprechenden Eigenschaften besitzen. Die Frage, ob der entgegengesetzte Grundsatz gilt oder nicht, d. h. ob dies Prinzip zu einigen Phänomenen, die sich außer den Grenzen der linearen Elastizität befinden, anwendbar ist, wird in unseren anderen Publikationen behandelt.

2. Für die Mittelwerte der biharmonischen Funktionen hat der Verfasser eine neue Eigenschaft gefunden, als spezieller Fall einer allgemeinen Reihe, die den Mittelwert einer Funktion durch sie selbst als auch durch ihre iterierte Laplaciane ausdrückt (siehe z. B. „Sitzungsberichte der Pariser Akademie“, 1956, Bd. 243, S. 1273). Beweisen wir hier diese Mittelwerteigenschaften unmittelbar.

Betrachten wir den allgemeinen dreidimensionalen Fall und zwei Mittelwerte: $\bar{\varphi}$, einen Mittelwert über alle Punkte, die sich auf der Oberfläche einer Kugel (Durchmesser R) befinden, erstreckt über φ , einen anderen Mittelwert, welcher allen Punkten in dieser Kugel entspricht: $\bar{\varphi} = \frac{3}{R^3} \int_0^R \bar{\varphi} r^2 dr$. Stellt man jetzt eine Funktion φ mit Hilfe der x, y, z -Potenzenreihe dar, ersetzt man x, y, z (kartesische Koordinaten) durch r, Θ, ϑ und integriert man über Θ und ϑ , so erhält man:

$$\bar{\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} R^{2n} \Delta^n \varphi, \quad \text{wo: } C_{2n} = \frac{1}{2n \cdot m(m+2)(m+4) \dots (m+2n-2)} \Big|_{m=3} \quad (2).$$

Im Falle der biharmonischen Funktionen sind alle $\Delta^n \varphi$, von $\Delta^2 \varphi$ ab, der Null gleich; und von (2) bleibt nur:

$$\bar{\varphi}_3 = \varphi + \frac{R^2}{6} \Delta \varphi,$$

und dementsprechend

$$\bar{\varphi}_3 = \varphi + \frac{R^2}{10} \Delta \varphi \quad (3)$$

wo der Index „drei“ zur Bezeichnung des dreidimensionalen Falles eingeführt ist). Für den zweidimensionalen Fall hat man augenscheinlich:

$$\bar{\varphi}_2 = \varphi + \frac{R^2}{4} \Delta \varphi \quad \text{und} \quad \bar{\varphi}_2 = \varphi + \frac{R^2}{8} \Delta \varphi \quad (4).$$

Alle vier Formeln (3) und (4) können in eine folgende zusammengefaßt werden: Mittelwert $\varphi = \varphi + a R^2 \Delta \varphi$, wo a eine vom Stoff unabhängige Zahlkonstante ist. Diese Ergebnisse verallgemeinern die altbekannte Formel: Mittelwert $\varphi = \varphi$ für die Potentialfunktionen.

3. Die Formeln (3)–(4) sind nichts anderes als ein mathematischer Ausdruck für das *St. Venantsche* Prinzip. In der Tat, wenn man die Differenz des Mittelwertes und der Funktion selbst als „Anomalie“ bezeichnet, bekommt man aus (3)–(4) sehr leicht, daß die Anomalie einer biharmonischen Funktion eine harmonische Funktion ist. (Übrigens gilt im allgemeinen ein Satz, daß die Anomalie einer m' -harmonischen Funktion eine $(m - 1)$ '-harmonische ist).

$$\text{Anomalie} = A = \text{Mittelwert } \varphi - \varphi; \Delta A = \Delta (\text{Mittelwert } \varphi - \varphi) = a R^2 \Delta \Delta \varphi = 0 \quad . . (5).$$

Diese Weise, die Anomalien einzuführen, ist vom physikalisch-mathematischen Gesichtspunkt aus sehr natürlich. In der Tat, hat eine Funktion nur kleine Abweichungen, so wird sie durch kleine Anomalienwerte charakterisiert; ragt ein Funktionswert in einem Punkt hervor, so wird dieser Punkt einen beträchtlichen Anomalienwert besitzen.

Zur mathematischen Folgerung von (3), (4), (5) zurückkehrend, bemerkt man soeben, daß aus der Tatsache, daß die Anomalie harmonisch ist, gleich die Abwesenheit der Anomalienextrema im betrachteten elastischen Gebiete folgt; diese Extrema können sich nur in der Unendlichkeit und auf den Grenzen (Oberflächen) der elastischen Körper befinden. Das ist genau der Inhalt des *St. Venantschen* Prinzips. Nicht nur das Prinzip im allgemeinen, sogar die bekannten Ausnahmefälle (z.B. das Drehen eines Balkens) sind in den gegebenen Ergebnissen enthalten.

Anschrift: Prof. Dr. M. Matschinski, St. Michel-sur-Orge (Paris), 7, allée de la Butte

Kinetisches Durchschlagen des schwach gekrümmten Stabes

Von E. Mettler und F. Weidenhammer

In der Statik ist das Durchschlagen des gekrümmten Stabes ein wohlbekanntes Stabilitätsproblem. Ein ganz entsprechendes kinetisches Stabilitätsproblem entsteht, wenn der gekrümmte Stab unter der Einwirkung einer schwingenden Querbelastung steht [1]. Mit den Annahmen der technischen Biegelehre und der *Kirchhoffschen* Näherung für die Stablängskraft kann man zur Beschreibung der Stabschwingungen eine inhomogene nichtlineare Integrodifferentialgleichung für die Biegeschwingung allein aufstellen. Ein Lösungsansatz mit zeitabhängigen Funktionen führt diese partielle Integrodifferentialgleichung für eine beliebige Lastverteilung auf ein System nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen zurück. Aus diesem System lassen sich die erzwungenen Schwingungen mit einer Störungsrechnung berechnen; sie haben im wesentlichen den gleichen Frequenz-Amplituden-Zusammenhang, den man schon vom *Duffingschen* Schwingungsproblem her kennt. Die zugehörigen Amplitudensprünge lassen sich in einer Weise deuten, die erkennen läßt, daß sich das statische und das kinetische Stabilitätsproblem weitgehend entsprechen [2].

Literatur

- [1] E. Mettler, Erzwungene nichtlineare Schwingungen elastischer Körper, IX^e Congr. Intern. de Méc. appl., Actes t. V, Bruxelles 1957, p. 5–26.
- [2] Eine ausführliche Veröffentlichung ist an anderer Stelle vorgesehen.

Anschriften: Prof. Dr. E. Mettler, Karlsruhe-Durlach, Geigersbergstr. 12
Prof. Dr. F. Weidenhammer, Karlsruhe-West, Hertzstr. 16, Bau 40

Bernoullische Hypothesen bei Balken- und Plattentheorie

Von Dietrich Morgenstern

Fragestellung:

Die dreidimensionale lineare Elastizitätstheorie ist eine in sich abgeschlossene Theorie mit Existenz- und Eindeutigkeitssätzen für die einschlägigen Randwertaufgaben. Für die technisch wichtigen Bauelemente Balken und Platten werden aber spezielle Theorien benutzt, die für den Fall des Balkens die folgenden Gleichungen als Grundgleichungen enthalten:

$$E J w'' = M(x) = \text{Biegemoment} \\ - M''(x) = p(x) = \text{Belastungsdichte.}$$

Für die Platte gelten entsprechend folgende Grundgleichungen (Kirchhoffsche Plattentheorie) für die Plattenmomente

$$M_{i|k} = Q_i \\ M_{11} = -N(w_{,11} + \nu w_{,22}), \quad M_{12} = -(1 - \nu) N w_{,12}, \quad M_{22} = -N(w_{,22} + \nu w_{,11})$$

und die Querkräfte Q_i

$$Q_{i|i} = p(x_1, x_2) = \text{Belastungsdichte.}$$

Dabei ist w die Durchbiegung und $N = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}$ die Plattensteifigkeit. Dazu kommen noch Randbedingungen.

Diese Gleichungen werden durch zusätzliche, seit Bernoullis Herleitung der Balkengleichung nach ihm benannte Hypothesen aus dem der dreidimensionalen Theorie entnommenen Hookeschen Gesetz hergeleitet: [1], [2], [3]. Senkrechte zur Balken- bzw. Plattenmittelfläche bleiben senkrecht dazu, Querkräfte und Schubspannungen werden vernachlässigt, und manchmal wird auch noch angenommen, daß die Verschiebungen in der Richtung senkrecht zur Mittelfläche unabhängig vom Abstand von derselben sei.

Es erscheint wünschenswert, sowohl um diese begriffliche Lücke zu schließen, als auch um etwaige verbesserte Theorien zu ermöglichen, eine Herleitung für die Balken- und Plattentheorie ohne zusätzliche Hypothesen aus der dreidimensionalen Elastizitätstheorie zu geben. Für den Fall der Balkengleichung ist dies in einer als Dissertation einzureichenden Arbeit von Herrn Klaus André mit der auch hier benutzten Methode des Energievergleiches, aber auf andere Weise und für andere Fälle geleistet. Die hier dargestellten Überlegungen, die für Balken und Platte gelten, werden der Kürze wegen für die Gewinnung der Balkengleichung aus der zweidimensionalen Elastizitätstheorie dargestellt. Es müssen also die Gleichungen

$$\sigma_{ik} = 2 G \left\{ \varepsilon_{ik} + \frac{1}{m-1} \delta_{ik} \sum_{l=1}^2 \varepsilon_{ll} \right\}, \\ \varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} (u_{i,k} + u_{k,i}), \\ \sigma_{1k,k} = 0, \\ \sigma_{2k|k} = \frac{1}{h} p(x)$$

in dem Bereich

$$0 \leq x_1 \leq l, \quad |x_2| \leq \frac{h}{2}$$

mit den Randbedingungen $\sigma_{ik} n_i = 0$ an der gesamten Randkurve gelöst werden, und es soll dann gezeigt werden, daß die Lösungen dieses partiellen Differentialgleichungssystems bei immer kleiner werdendem h immer besser durch die Lösung der Balkengleichung beschrieben werden. Dabei ist der Einfachheit wegen angenommen worden, daß die Belastung p im Gleichgewicht ist; spezielle Einspannungen und Auflagerungen ändern nichts an den wesentlichen Überlegungen, und die hier gemachte Annahme ist physikalisch nicht unzutreffend. Zum Vergleich wird die Lösung der Balkengleichung durch die Substitution

$$p = h^3 p_0(x), \quad J = h^3 J_0, \quad M(x) = h^3 M^{(0)}(x)$$

von h unabhängig gemacht und dann zunächst gezeigt, daß der dem zweidimensionalen Problem zugehörige Energieausdruck $\mathfrak{E}^{(0)}/h^3$ bei $h \rightarrow 0$ gegen den entsprechenden Energiewert des Balkens strebt, woraus dann nach hier nicht dargestellten Überlegungen folgt, daß in einem gewissen Mittel die Verschiebungen gegen die entsprechenden durch die Balkendurchbiegung w beschriebenen Größen streben.

Asymptotischer Vergleich der Energieausdrücke [4]

Für den Wert der Energie des zweidimensionalen Kontinuums gilt nach dem Prinzip von Minimum der Formänderungsarbeit die Abschätzung

$$-\mathfrak{E}_h \leq G \iint \left[\sum_{i,k=1}^2 \varepsilon_{ik}^2 + \frac{1}{m-1} \left(\sum_{l=1}^2 \varepsilon_{ll} \right)^2 \right] dx_1 dx_2 - \iint u_2 h^2 p_0 dx_1 dx_2$$

mit irgendwelchen Verschiebungen u_i und daraus hergeleiteten Verzerrungen.

Insbesondere ergibt der Ansatz

$$u_1 = -x_2 w'(x_1), \quad u_2 = w(x_1) + x_2^2 W(x_1)$$

die Abschätzung

$$\lim_{h \rightarrow 0} -\frac{\mathfrak{E}_h}{h^3} = \lim_{h \rightarrow 0} -\mathfrak{E}_h^{(0)} \leq \frac{1}{2} J_0 \int w'^2 dx - \int w p dx = \mathfrak{E}_0,$$

wenn w die Lösung der Balkengleichung ist.

Eine Abschätzung für $\mathfrak{E}_h^{(0)}$ nach oben ergibt sich aus dem Prinzip vom Minimum der Spannungsarbeit (oft Prinzip vom Minimum der Ergänzungsarbeit, oder nach Castiliano oder Menabrea genannt)

$$\mathfrak{E}_h \leq \frac{1}{4G} \iint \left[\sum \sigma_{ik}^2 - \frac{1}{m+1} \left(\sum \sigma_{ll} \right)^2 \right] dx_1 dx_2 = (*)$$

wenn irgendwelche den Gleichungen $\sigma_{ik|k} = 0$ bzw. $= h^2 p_0$ und den Randbedingungen genügende Funktionen $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ eingesetzt werden.

Ein solch zulässiges System ergibt sich aus den Lösungen der Balkengleichung:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 12 x_2 M^{(0)}(x_1), \\ \sigma_{12} &= -\left(6 x_2^2 - \frac{3}{2} h^2 \right) M^{(0)'}(x_1), \\ \sigma_{22} &= \left(2 x_2^3 - \frac{x_2}{2} h^2 \right) M^{(0)''}(x_1). \end{aligned}$$

Für den Integralausdruck (*) ergibt sich damit die asymptotische Abschätzung

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathfrak{E}_h^{(0)} \leq \frac{1}{2 J_0 E} \cdot \int_0^l M_0'^2 dx = \mathfrak{E}_0.$$

Aus beiden Abschätzungen erkennt man

$$\lim \mathfrak{E}_h^{(0)} = \mathfrak{E}_0,$$

und aus dieser Beziehung kann unter erneuter Benutzung des Minimumcharakters der Energieausdrücke die behauptete Konvergenz gefolgert werden:

$$\begin{aligned} u_1 &\rightarrow -x_2 w' \\ u_2 &\rightarrow w, \end{aligned}$$

womit die Balkengleichung ohne zusätzliche Hypothesen hergeleitet ist.

Bemerkungen über die Platte

Für die Platte komplizieren sich die Dinge dadurch, daß der dem obigen Ansatz entsprechende i. a. nicht alle Randbedingungen erfüllt; es gilt ja im Falle des freien Randes für die Kirchhoffsche Plattentheorie die *Tait'sche* Randbedingung

$$Q_i n_i + \frac{d}{ds} (M_{ik} n_i t_k) = 0 \quad \text{und} \quad M_{ik} n_i n_k = 0,$$

während

$$Q_i n_i = 0, \quad M_{ik} n_i = 0 \quad (k = 1, 2)$$

erwünscht ist.

Deshalb wird eine auf Grund der allgemeinen Lösung

$$M_{11} = \Phi_{|2}, \quad M_{12} = -\frac{1}{2} \Phi_{|1} - \frac{1}{2} \Psi_{|2}, \quad M_{22} = \Psi_{|1}$$

für die Plattenmomente mögliche Anpassungsfunktion eingeführt, deren Existenz in mühevoller Rechnung nachgewiesen werden kann. Die weiteren Überlegungen gelten analog der Balkenbetrachtung. Solange die Untersuchungen auf die Durchbiegung beschränkt bleiben, führt ein Vergleich mit der *Reissnerschen* Theorie [5], [6] zu nichts neuem.

Sowohl die erwähnten Untersuchungen von Herrn André wie die hier berichteten Ergebnisse sollen im Archive for Rational Mechanics and Analysis erscheinen.

Literatur

- [1] Szabó, I., Einführung in die technische Mechanik. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer 1954, 4. Aufl. 1959 insb. p. 91—93.
- [2] Szabó, I., Höhere technische Mechanik, Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer 1956, 2. Aufl. 1956, insbes. p. 167—175 u. 463.
- [3] Sneddon, I. N. & D. S. Berry, The classical theory of elasticity. p. 1—126 im Handbuch der Physik. Band 6. Springer 1956, insb. p. 38/39.
- [4] Morgenstern, D., Mathematische Begründung der Scheibentheorie (zweidimensionale Elastizitätstheorie). Archive for Rational Mechanics and Analysis 3 (1959) 91—96.
- [5] Reissner, E., The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. J. appl. Mechanics. 12 (1945) 69.
- [6] Schäfer, M., Über eine Verfeinerung der klassischen Theorie dünner schwach gebogener Platten. Zeitschr. angew. Math. Mech. 32 (1952) 161—171.

Anschrift: Dr. Dietrich Morgenstern, Berlin-Schlachtensee, Lagardestr. 9

Contributions to the problem of vibrations of plates with damping considered

By Danilo Rašković

The paper presents the problem of free vibrations of thin elastic, homogeneous plate considering the influence of internal viscous damping proportional to the velocity. Assuming that *Kirchhoff's* conditions are satisfied one treats the basic problem and the governed partial differential equation is derived by means of Calculus of variations with boundary conditions [1]:

$$D\Delta\Delta w + \varrho h w_{tt} = 0, \quad \oint_{(L)} (P_1 dx + Q_1 dy) + \oint_{(L)} (P_2 dx + Q_2 dy) = 0.$$

In the case when the damping force is proportional to the first power of the velocity the governed differential equation becomes $D\Delta\Delta w + \beta w_t + \varrho h w_{tt} = 0$, where β is the damping coefficient. Using the generalized *Galerkin's* method, [2], for the solution of governed differential equation, $W = \sum_k C_k \varphi_k(x, y)$, the natural frequencies can be determined by means of the system of linear algebraic equations presented in matrix form $(A - \lambda B) \{C_k\} = \{0\}$, with the matrix coefficients $a_{ik} = \iint_A (\Delta\Delta\varphi_k) \varphi_i dx dy$, $b_{ik} = \iint_A \varphi_k \varphi_i dx dy$, namely, from the frequency equation $f(\lambda) = |A - \lambda B| = 0$, where λ is the eigenvalue.

The problem of rectangular plate is treated in detail, namely square plate. In this investigation, on the contrary to the other authors, [3; 4; 5; 6], use is made of the functions which define the normal modes of vibration of uniform beams. Values of different integrals of the functions and their derivatives have been computed. The solutions are obtained for these specific plate problems, namely, square plate clamped at all four edges; cantilever plate; square plate clamped along two adjacent edges and free along the other two edges; square plate clamped along two opposite edges and free along the other two edges; square plate clamped along two adjacent edges and free supported along the other two edges. The results are compared with the known results for the case of free vibrations of these plates, [3; 4; 5; 6]. The case of the plate with elastic clamped edges is treated also, [7].

The problem of vibration of triangular cantilever plate is discussed also supposing, on the contrary to the previous paper, [8], that the edge is elastic clamped. The two symmetric and two antisymmetric modes of vibration of isosceles triangular plate are discussed. A nonorthogonal coordinate system is used which gave constant limits of integration over the area of the triangle. The results are compared with the previously obtained results when the edges are rigid clamped, [8], which agree very well with the results of Andersen, [9].

The problem of vibrations of a circular and elliptical plate is also treated.

It is shown that the natural frequencies decrease when the damping factor increases.

- [1] Weinstock, K., Calculus of Variations. New York, 1952.
- [2] Galerkin, B. G., *Steržni i plastinki*. Vest. inž. i teh. No. 19. Moskva 1916.
- [3] Iguchi, S., Die Biegeschwingungen der vierseitig eingespannten rechteckigen Platte. Ing. Arch. (1937).
- [4] Weinstein, A., *Mémoire des sciences mathématiques*, Vol. 88 — Etudes des spectres des équations aux dérivées partielles de la théorie des plaques élastiques. Paris 1937.
- [5] Young, D., Vibrations of Rectangular Plates by the Ritz Method. Ap. Mech. Rev. Vol. 17, No. 4 (1950).
- [6] Barton, M. V., Vibration of Rectangular and Skew Cantilever Plates. JAM, Vol. 73 (1951).
- [7] Rašković, D., Flexural Vibrations of the Homogeneous Beams With Elastic Clamped Edges. (in Serbian with English summary). Mašinstvo i elektrotehnika No. 2, page 253 (1957).
- [8] Rašković, D. — Les vibrations transversales d'une plaque triangulaire soumise à l'amortissement. IX. Int. Congress pour Mech. Bruxelles, 1956, Bul. p. 478.
- [9] Andersen, B. W., Vibration of Triangular Cantilever Plates by the Ritz Method. JAM, Vol. 21, No. 4 (1954).

Anschrift: Dr.-Ing. Dipl. Math. Danilo Rašković, Belgrad, Timočka 46, Jugoslawien

A geometric derivation of the non linear stress-strain relations for isotropic elastic solids

By *Rastko Stojanovitch*

This is an attempt for the application of some modern differential geometric concepts of deformation¹⁾ of geometric objects to the theory of elasticity.

Let R be a region in the space (Euclidean E_3), let x_P^i be coordinates of points P of R with respect to a system of reference fixed in the space, and let R be deformed to \bar{R} . Points Q of the deformed region are in 1:1 correspondence with the points P of the undeformed, connected by a 1:1 punctual transformation

$$x_Q^i = f^i(x_P); \quad x_P^i = \varphi^i(x_Q) \quad \dots \quad (1).$$

If we introduce by definition a new system of coordinates \bar{x}^i such that

$$\bar{x}_Q^i \stackrel{\text{def}}{=} x_P^i = \varphi^i(x_Q),$$

then \bar{x}^i :

$$\bar{x}^i = \varphi^i(x) \quad \dots \quad (1')$$

is a coordinate system dragged along^{1,2)} by the punctual transformation (1).

If Ω^Λ is a geometric object in the space, with the transformation formula

$$\bar{\Omega}^\Lambda \{\bar{x}\} = F^\Lambda(\Omega \{x\}, x, \bar{x}),$$

then

$$\bar{\Omega}^\Lambda = F^\Lambda(\Omega \{\varphi(x)\}, x, \bar{x})$$

is the geometric object Ω^Λ dragged along by the punctual transformation; the difference $\bar{\Omega}^\Lambda - \Omega^\Lambda$ is the deformation of the object.

Applying this process to the fundamental tensor g_{ij} of the space, we obtain that the deformation

$$\varepsilon_{ij} \equiv \bar{g}_{ij} - g_{ij} = g_{ab} \{\varphi(x)\} \partial_i \varphi^a \partial_j \varphi^b - g_{ij} \quad \left(\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \quad \dots \quad (2)$$

is the well known Cauchy-Green deformation tensor.

¹⁾ Cf., for instance, K. Yanò, The Theory of Lie Derivatives and its Applications. North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1957.

²⁾ Schouten, J. A., Ricci-Calculus. Springer (1954), p. 102ff.

Now, let us suppose that the elasto-mechanical properties of an isotropic solid Σ occupying the region R in E_3 are entirely characterized by the isotropic tensor E_{ijkl} , with components (in an orthogonal Cartesian frame of reference $g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$)

$$E_{ijkl} = \alpha_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + \alpha_2 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

α_1 and α_2 are functions of the invariants of the deformation tensor.

Considering this tensor as a geometric object defined over R , we can drag it along and deform when Σ is deformed to $\bar{\Sigma}$ and, correspondingly, R to \bar{R} . We have

$$\begin{aligned} \bar{E}_{ijkl} &= E_{abcd} \{ \varphi(x) \} \partial_i \varphi^a \partial_j \varphi^b \partial_k \varphi^c \partial_l \varphi^d \\ &= \alpha_1 (g_{ij} + \varepsilon_{ij}) (g_{kl} + \varepsilon_{kl}) + \alpha_2 [(g_{ik} + \varepsilon_{ik}) (g_{jl} + \varepsilon_{jl}) + (g_{il} + \varepsilon_{il}) (g_{jk} + \varepsilon_{jk})]. \end{aligned}$$

The deformation

$$\begin{aligned} t_{ijkl} &\stackrel{\text{def}}{=} \bar{E}_{ijkl} - E_{ijkl} \\ &= \alpha_1 (\delta_{ij} \varepsilon_{kl} + \delta_{kl} \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}) + \alpha_2 (\delta_{ik} \varepsilon_{jl} + \delta_{jl} \varepsilon_{ik} + \delta_{il} \varepsilon_{jk} + \delta_{jk} \varepsilon_{il} + \varepsilon_{ik} \varepsilon_{jl} + \varepsilon_{il} \varepsilon_{jk}) \end{aligned}$$

we shall call the fourth order stress tensor. The contracted tensor

$$t_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} t_{ijk}^k = \alpha_1 S_1 \delta_{ij} + (3\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_1 S_1) \varepsilon_{ij} + 2\alpha_2 \varepsilon_i^k \varepsilon_{jk} \quad \dots \quad (3)$$

is the second order stress tensor for isotropic solids; S_1 is the first invariant of the deformation tensor, $S_1 \equiv \delta_j^i \varepsilon_i^j$.

In the case of infinitesimal deformations,

$$\bar{x}^i = x^i + \varepsilon v^i \equiv \varphi^i(x),$$

where ε is an infinitesimal scalar and v^i the vector of displacement, the deformation of geometric objects reduces to the Lie derivative^{3,4)} with respect to v^i :

$$L_v \Omega^\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Omega^\Lambda - \Omega^\Lambda}{\varepsilon},$$

and we obtain by the direct calculation

$$t_{ijkl} = L_v E_{ijkl} = \alpha_1 (\varepsilon_{ij} \delta_{kl} + \varepsilon_{kl} \delta_{ij}) + \alpha_2 (\varepsilon_{ik} \delta_{jl} + \varepsilon_{il} \delta_{jk} + \varepsilon_{jl} \delta_{ik} + \varepsilon_{jk} \delta_{il}) \quad \dots \quad (4),$$

and the second order stress tensor will be

$$t_{ij} = t_{ijk}^k = \alpha_1 S_1 \delta_{ij} + (3\alpha_1 + 4\alpha_2) \varepsilon_{ij} \quad \dots \quad (5),$$

while (2) is reduced to $\varepsilon_{ij} = L_v g_{ij} = \partial_i v_j + \partial_j v_i$.

If we treat the state $\bar{\Sigma}$ as initial, properties of the solid are characterized by $\bar{E}_{ijkl} = E_{ijkl} + t_{ijkl}$. If $\bar{\Sigma}$ is to be isotropic as Σ was, it is possible only if t_{ijkl} is of the form $t_{ijkl} = \frac{1}{3} p \delta_{ij} \delta_{kl}$ where p is a scalar pressure. Applying the deformation (1') to the solid $\bar{\Sigma}$, we obtain for the second order stress tensor

$$t_{ij} = p \delta_{ij} + S_1 \left(\frac{1}{3} p + \alpha_1 \right) \delta_{ij} + \left[(3 + S_1) \left(\frac{1}{3} p + \alpha_1 \right) + 4\alpha_2 \right] \varepsilon_{ij} + 2\alpha_2 \varepsilon_i^k \varepsilon_{jk} \quad \dots \quad (6).$$

Equations (3) and (6) are of the form of the well known general stress-strain relations for isotropic solids⁵⁾, while (5) is the stress-strain relation of the infinitesimal theory.

Anschrift: Doz. Dr. R. Stojanovitch, Proleterskih brigada 39/I, Belgrade, Jugoslawien

³⁾ K. Yano, *ibid.* p. 18ff.

⁴⁾ J. A. Schouten, *ibid.* p. 104.

⁵⁾ Cf. C. Truesdell, *Mechanical Foundations of Elasticity and Fluid Dynamics*. Journ. Rat. Mech. and Analysis, Vol. 1, No. 1, 2 (1952), pp. 125—300.

Über die zeitabhängigen plastischen Vorgänge in vorgespannten Druckstollen

Von W. Swida

In den letzten Jahren werden beim Bau der Druckstollen für Hochdruckwasserkraftanlagen neuartige Verfahren angewendet, bei denen der schmale Hohlring zwischen Kernrohr und Betonauskleidung des Gebirges unter hohem Druck mit Zementmörtel ausgepreßt wird (Bild 1).

Die Erfahrung zeigt jedoch, daß in einigen Fällen ein nicht unerheblicher Teil der durch dieses „Vorspannen“ im Kernrohr erzeugten — den Spannungen aus Wasserdruck entgegenwirkenden — Ringdruckspannungen verlorenght, und zwar infolge der plastischen Verformung des Betons unter dem Einfluß des Kriechens und Schwindens.

Die Radialpressungsverluste für die Berührungsflächen 1 und 2 (Bild 1) lassen sich aus folgenden Differentialgleichungen ermitteln:

$$\frac{d^2 p_{1t}}{d\psi^2} + (D + \alpha' \psi^e) \frac{dp_{1t}}{d\psi} - (F + G \psi^{e-1} + H \psi^e) p_{1t} = L + P \psi^{e-1} + Q \psi^e; \quad (1)$$

$$\frac{dp_{2t}}{d\varphi} = \frac{1}{\beta_1} \left(\alpha_2 \frac{dp_{1t}}{d\varphi} + \alpha_2 p_{1t} - \alpha_1 p_{2t} - \gamma_1 \right) \quad (2)$$

mit

$$\alpha_1 = \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \mu_m; \quad \alpha_2 = \frac{2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

$$\beta_1 = \alpha_1 + \frac{E_m}{E_g} (1 + \mu_g); \quad \gamma_1 = \alpha_2 p_1 - \alpha_1 p_2 - \frac{\varepsilon_s E_m}{\varphi_\infty}$$

$$\begin{aligned} \psi &= \varphi_\infty - \varphi; & D &= a_1 + a_2; & F &= b_1 b_2 - a_1 a_2; & P &= -c' \varrho; \\ H &= b_1 b'' - a_2 a'; & Q &= b_1 c'' - c' a_2; & a' &= -\frac{\alpha''' \cdot \beta_1 \cdot n}{\kappa}; \\ L &= b_1 c_2 - c_1 a_2; & G &= -a' \varrho; & c' &= \frac{\alpha_2 \gamma''}{\kappa}; \\ b'' &= -\frac{\alpha''' \cdot \alpha_2 \cdot n}{\kappa}; & c' &= \frac{\gamma'' \beta_1}{\kappa}; & c'' &= \frac{\alpha_2 \gamma''}{\kappa}; \end{aligned}$$

$$\kappa = \beta' \beta_1 + \alpha'' \alpha_2; \quad \alpha' = \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \mu_m; \quad \alpha'' = \frac{2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2};$$

$$\beta' = \frac{E_m}{E_b} \left(\mu_b - \frac{r_1^2 + r_0^2}{r_1^2 - r_0^2} \right) - \alpha'; \quad \alpha''' = \frac{E_m}{E_b} \left(\mu_b - \frac{r_1^2 + r_0^2}{r_1^2 - r_0^2} \right)$$

$$\gamma' = n \left(p_1 \alpha''' - \frac{\varepsilon_s^*}{\varphi_\infty^*} E_m \right); \quad \gamma' = \alpha'' p_2 - \alpha' p_1 + \frac{\varepsilon_s}{\varphi_\infty} E_m;$$

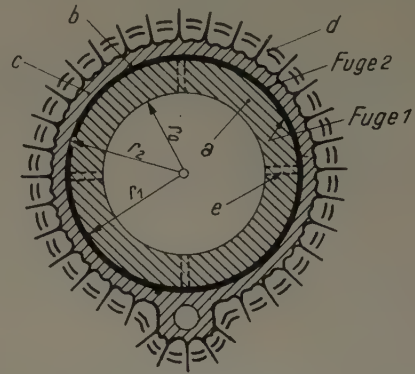
$$a_1 = \frac{1}{\kappa} (\alpha' \beta_1 - \alpha'' \alpha_2); \quad a_2 = -\frac{1}{\kappa} (\alpha'' \alpha_2 + \alpha_1 \beta');$$

$$b_1 = \frac{\alpha''}{\kappa} (\alpha_1 - \beta_1); \quad b_2 = \frac{\alpha_2}{\kappa} (\alpha' + \beta');$$

$$c_1 = \frac{1}{\kappa} (\gamma' \beta_1 + \alpha'' \gamma_1); \quad c_2 = \frac{1}{\kappa} (\alpha_2 \gamma' - \gamma_1 \beta');$$

$$\varphi = \varphi_\infty (1 - e^{-\vartheta \cdot t}); \quad \varphi^* = \varphi_\infty^* (1 - e^{-\vartheta^* \cdot t});$$

$$n = \frac{\varphi_\infty^* \cdot \vartheta^*}{\vartheta \cdot \varphi_\infty^{\vartheta^*/\vartheta}}; \quad \varrho = \frac{\vartheta^*}{\vartheta} - 1.$$



Stollenquerschnitt

a = Kernring

b = Preßring

c = Verkleidungsring (Betonmantel)

d = Gebirge

e = Einpreß- und Druckprüfungsrohr

Bild 1

diesem Beitrag werden wir holonomische rheonomische Bindungen annehmen. Wir verwenden dann die *Lagrangeschen* Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_j} = Q_j \quad (1).$$

Die Bewegung der „kinetischen Einheiten“ ist dabei mit „ w “ geometrischen

$$\Phi_\alpha (\dots x_i, y_i, z_i \dots t) = 0$$

und „ v “ kinematischen/holonomischen-integrierbaren/

$$\Psi_\beta (\dots \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i \dots t) = 0$$

Bindungen begrenzt.

Als verallgemeinerte Koordinaten nehmen wir z. B. drei lineare (x_s, y_s, z_s -S-Massenmittelpunkt) und drei *Eulersche* Winkel $\varphi_s, \psi_s, \theta_s$ an. Die parametrischen Bewegungsgleichungen einer beliebigen kinetischen Einheit lauten:

$$x_i = x_s + a_{11} \xi_i + a_{12} \eta_i + a_{13} \zeta_i \quad (2),$$

wo z. B.

$$a_{11} = \cos \psi_s \cos \varphi_s - \sin \psi_s \cos \theta_s$$

und

$$\xi = \xi_0 + \Delta \xi(t), \eta = \eta_0 + \Delta \eta(t), \zeta = \zeta_0 + \Delta \zeta(t)$$

wegen der Änderung des Radiusvektors:

$$\Delta \bar{\rho}_i = \Delta \bar{\rho}_i (\dots x_i, y_i, z_i \dots \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i \dots t)$$

bei der Deformation des Systems.

Nach der entsprechenden Analyse der Verschiebungen der Teilchen bekommen wir für $\Delta \xi, \Delta \eta, \Delta \zeta$:

$$\Delta \xi_i = \sum_{m=0}^{\mu} \frac{R_{i,m,m+1}^{\xi}}{C_{i,m,m+1}^{\xi}} + \Delta \xi_s; \Delta \eta_i = \sum_{m=0}^{\mu} \frac{R_{i,m,m+1}^{\eta}}{C_{i,m,m+1}^{\eta}} + \Delta \eta_s; \Delta \zeta_i = \sum_{m=0}^{\mu} \frac{R_{i,m,m+1}^{\zeta}}{C_{i,m,m+1}^{\zeta}} + \Delta \zeta_s \quad (3).$$

Mittels der Anwendung eines 5-Parameter Modells verbinden wir entsprechend paarweise parallel die geometrischen und kinematischen Bindungen. Die Reaktion der Bindung im beliebigen Punkt ist

$$R_{\alpha_{ix}} = \lambda_x \frac{\partial}{\partial x_i} [\Phi_\alpha + \kappa_\beta \Psi_\beta]; R_{\alpha_{iy}} = \lambda_x \frac{\partial}{\partial y_i} [\Phi_\alpha + \kappa_\beta \Psi_\beta]; R_{\alpha_{iz}} = \lambda_x \frac{\partial}{\partial z_i} [\Phi_\alpha + \kappa_\beta \Psi_\beta] \quad (4),$$

wo λ_x ein *Lagrangescher* Multiplikator und κ_β der Koeffizient der viscoelastischen Eigenschaften des Stoffes sind. Für das angewandte Modell bestimmen wir die sog. Einfluß-Koordinationszahl:

$$\alpha_{jk} = \frac{1}{C_{jk}} = L_{jk} \left[\frac{1}{E_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) + \frac{1}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) + \frac{t}{\eta_3} \right] \cdot \frac{1}{n},$$

die wir in den Bindungsgleichungen (5) benutzen:

$$\Psi_{ik} = x_i - x_k - a_{11} (\xi_i - \xi_k) - a_{12} (\eta_i - \eta_k) - a_{13} (\zeta_i - \zeta_k) \quad (5),$$

wo z. B.

$$\Delta \xi_i - \Delta \xi_k = \frac{1}{C_{i,k}^{\xi}} \lambda_{ik} \frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial x_i}$$

u. ähnlich für $\Delta \eta$ und $\Delta \zeta$.

Wir bekommen also lineare Gleichungen mit partiellen Ableitungen in der allgemeinen Gestalt:

$$\Psi_{ik} = x_i - x_k - D - A \frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial x_i} - B \frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial y_i} - C \frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial z_i} = 0$$

die wir mit den bekannten Methoden lösen.

Das Problem ist dann also von der physikalischen Seite her theoretisch gelöst. Wir müssen noch das System der sechs *Lagrangeschen* Differentialgleichungen lösen. Wir benutzen dabei z. B. die Methode von Cauchy, das ist aber schon der mathematische Teil des Problems.

Anschrift: Dr.-Ing. Jerzy Zawadzki, Techn. Hochschule Wrocław, Lehrst. f. Techn. Mechanik, Wrocław, Smoluchowskiinstr. 25, Polen

D. STRÖMUNGSLEHRE

Zur Umrechnung einer gegebenen Geschwindigkeitsverteilung an einem Einzel- oder Gitterprofil auf einen anderen Strömungszustand

Von R. Döge

Der übliche Weg bei der Berechnung der Strömung um ein Einzel- oder Gitterprofil mit Hilfe der konformen Abbildung führt über die konforme Abbildung der Profilebene (ζ -Ebene) auf die Kreisebene (z -Ebene). Ist diese Abbildung (1)

$$\zeta = f(z) \quad \dots \quad (1)$$

bekannt, so läßt sich die Strömungsgeschwindigkeit am Profil (Index P) mit Hilfe der leicht zu ermittelnden Geschwindigkeit am Kreis (Index K) aus (2) berechnen.

$$w_P = w_K \frac{d\zeta}{dz} \quad \dots \quad (2)$$

Gelegentlich liegt auch die Aufgabe vor, eine gegebene Geschwindigkeitsverteilung auf einen anderen Strömungszustand (in (3) durch ' gekennzeichnet) umzurechnen. Gleichung (3) besagt,

$$\frac{w'_P}{w_P} = \frac{w'_K \cdot \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|}{w_K \cdot \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|} = \frac{w'_K}{w_K} \quad \dots \quad (3)$$

daß man dies in sehr einfacher Weise am Kreis tun kann, ohne die Verzerrung berücksichtigen zu müssen. Freilich muß dabei die Zuordnung von Punkten des Profils zu Punkten des Kreises bekannt sein. Da entsprechende Punkte gleiches Potential besitzen, kann man diese Zuordnung aus dem Vergleich des Potentialverlaufes am Profil mit dem am Kreis erhalten.

Das Potential am Profil ergibt sich dabei aus (4)

$$\Phi = \int w_P ds \quad \dots \quad (4)$$

(ds = Element der Profilberandung) und das am Kreis auf analytischem Wege.

Bei der numerischen Durchführung der Umrechnung ist auf die Erfüllung der *Kutta*-Bedingung zu achten. Außerdem werden für den Vergleich der Potentialverteilungen am Einzelprofil die Größe des Bildkreises und am Gitterprofil die Lage der Singularitäten zum Bildkreis benötigt.

Anschrift: Dr.-Ing. R. Döge, Dresden N 52, Braunsberger Str. 24

Die Grenzschichtströmung in einer rechtwinkligen Ecke*)

Von Klaus Gersten

Um bei der Strömung in einer rechtwinkligen Ecke (vgl. Bild 1) die Interferenz zwischen den Grenzschichten an den beiden angrenzenden Wänden zu charakterisieren, wird eine Interferenz-Verdrängungsdicke δ_3^* definiert [1]. Die wirkliche Strömung mit dem Isotachenverlauf nach Bild 1a wird ersetzt durch eine Modellströmung mit der gleichen sekundlichen Durchflußmenge. Entsprechend der Verdrängungsdicke δ_2^* der ebenen Grenzschicht läßt sich dann nach Bild 1b auch eine Interferenz-Verdrängungsdicke δ_3^* einführen. Für die inkompressible stationäre Strömung in einer Ecke ohne Druckgradient ist in Bild 2 δ_3^*/l in Abhängigkeit von der *Reynolds*-Zahl $Re = U_0 l/\nu$ aufgetragen. Die Kurve für die laminare Strömung stammt aus der Theorie von G. F. Carrier [2], für die turbulente Strömung aus Messungen [1]. Bemerkens-

*) Aus dem Institut für Strömungsmechanik der Technischen Hochschule Braunschweig (Leitung: Prof. Dr. H. Schlichting).

wert ist vor allem, daß für beide Strömungsformen die Abhängigkeit von der *Reynolds*-Zahl die gleiche ist, nämlich $\delta_3^*/l = C/\sqrt{Re}$. Ferner setzt der Umschlag laminar-turbulent in der Ecke viel früher ein, die laminare Anlaufstrecke in der Ecke ist ungefähr nur 25% von der weiter außen.

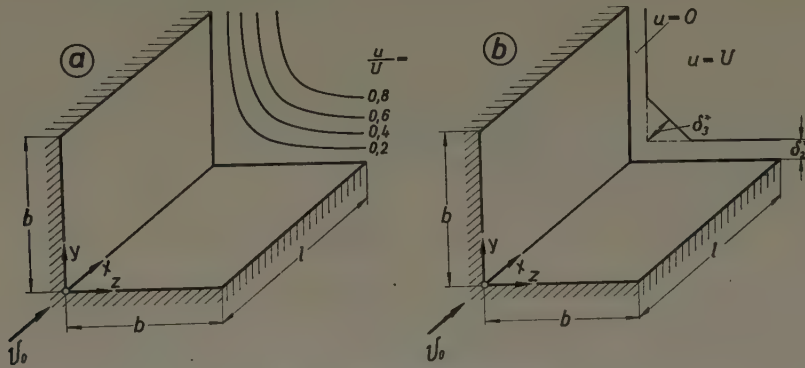
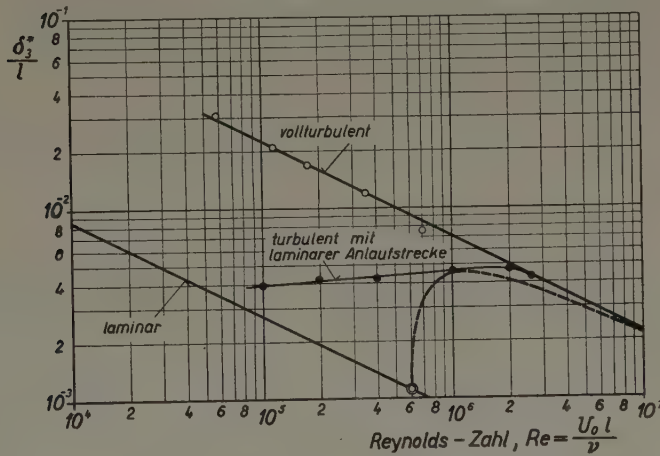


Bild 1. Strömung in einer Ecke

(a) Isotachenbild für Schnitt $x = l$ der wirklichen Strömung(b) Vereinfachte Strömung zur Definition der Interferenz-Verdrängungsdicke δ_3^* Bild 2. Interferenz-Verdrängungsdicke δ_3^*/l in Abhängigkeit von der Reynoldszahl $Re = U_0 l / \nu$ für die Strömung in einer Ecke ohne Druckgradient

- laminar, Theorie von G. F. Carrier [2], $\delta_3^*/l = 0,87/\sqrt{Re}$
- — vollturbulent, Messung [1], $\delta_3^*/l = 7,0/\sqrt{Re}$
- — turbulent mit laminarer Anlaufstrecke, Messung. Einsetzen des Umschlages bei $Re = 1,4 \cdot 10^5$
- turbulent mit laminarer Anlaufstrecke, wenn Umschlag überall gleichzeitig bei $Re = 6 \cdot 10^5$ einsetzt
- ⊙ — Umschlag weit entfernt von der Ecke. $Re = 6 \cdot 10^5$

Weitere wichtige Ergebnisse über die Interferenz bei turbulenter Strömung in einer rechtwinkligen Ecke sind:

1. Der Reibungswiderstand wird von der Interferenz nur sehr wenig beeinflusst. Zwei Platten, die eine rechtwinklige Ecke bilden, haben etwa denselben Reibungswiderstand wie zwei isolierte Platten, so daß man praktisch mit konstanter Verteilung der Wandschubspannung bis in die Ecke hinein rechnen kann.

2. Die Interferenz-Verdrängungsdicke nimmt bei Druckabfall ab, bei Druckanstieg stark zu.

3. Bei konstantem Druckanstieg $\frac{1}{\rho} \frac{dp}{U_0^2} \frac{dx}{dx}$ setzt die Ablösung der turbulenten Strömung in der Ecke früher ein, und zwar ist die Lauflänge bis zum Ablösungspunkt etwa nur 60% der Lauflänge ohne Interferenz.

Literatur

- [1] K. Gersten, Corner interference effects. Bericht Nr. 108 der Deutschen Forschungsanstalt für Luftfahrt (DFL), 1959; erscheint demnächst als AGARD-Report.
- [2] G. F. Carrier, The boundary layer in a corner. Quarterly Appl. Math., Vol. IV (1946), S. 367—370.

Anschrift: Dr.-Ing. K. Gersten, Braunschweig, Bienroder Weg 3

Der Zusammenhang zwischen den linearen und nicht-linearen Theorien der Strömungen mit Kavitation

Von J. A. Geurst

Für Umströmungen von Körpern mit endlichen Kavitationsgebieten stehen zwei nicht-lineare Theorien im Vordergrund (siehe [1]):

- a) das Modell mit rückkehrendem Strahl oder das *Prandtl-Wagnersche* Modell;
- b) das *Riabouchinskysche* Modell.

Eine linearisierte Theorie für Strömungen um schlanke Profile wurde 1953 von M. P. Tulin eingeführt [2].

Wir zeigen nun (am Beispiel einer ebenen Platte senkrecht zur Hauptströmung), daß die linearisierte Theorie eine erste Approximation der beiden Modelle a) und b) ist. Der Verfasser hat denselben Zusammenhang auch für verschiedene andere Konfigurationen bewiesen. Das *Riabouchinskysche* Modell muß dann aber in geeigneter Weise interpretiert werden. Im Falle eines symmetrisch angeströmten Keiles z. B. ist diese Interpretation verschieden von dem Ansatz, den Plesset und Shaffer in [3] gemacht haben.

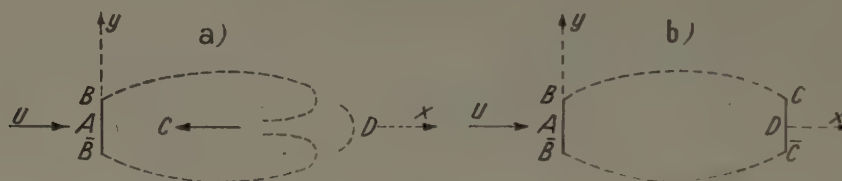


Bild 1

a) Das *Prandtl-Wagnersche* Modell ist wiedergegeben in Bild 1 a). Der rückkehrende Flüssigkeitsstrahl verschwindet auf einem zweiten Blatt der physischen Ebene. Der Punkt im Unendlichen auf diesem Blatt ist mit C angedeutet. D ist der Staupunkt hinter dem Kavitationsgebiet. Die Einheiten sind so gewählt, daß die konstante Geschwindigkeit am Rande des Kavitationsgebiets gleich 1 ist. Die obere Hälfte der physischen Ebene wird konform abgebildet auf die obere Hälfte einer t -Ebene. Die Bilder von A, B, C und D sind beziehungsweise $-a$, 0, c und d ; a , c und d sind reell und positiv; a kann willkürlich gewählt werden. Die Punkte im Unendlichen werden aufeinander bezogen.

- 1) Bestimmung des komplexen Geschwindigkeitspotentials Φ .

$$\frac{d\Phi}{dt} = K \frac{t-d}{t-c} \dots \dots \dots (1).$$

K ist eine reelle Konstante, die später bestimmt wird.

- 2) Für $\Omega = \log w$ (w ist die komplexe Geschwindigkeit) haben wir ein gemischtes Randwertproblem. Die Lösung ist (siehe [4])

$$w = \frac{[\sqrt{t(c+a)} - \sqrt{a(t-c)}]^{1/2}}{[\sqrt{t(c+a)} + \sqrt{a(t-c)}]^{1/2}} \cdot \frac{[\sqrt{d(t-c)} - \sqrt{t(d-c)}]}{[\sqrt{d(t-c)} + \sqrt{t(d-c)}]} \dots \dots \dots (2).$$

Die oben eingeführte konforme Abbildung wird gefunden aus

$$z = \int_a^t w^{-1} \frac{d\Phi}{dt} dt \dots \dots \dots (3).$$

Die Konstanten K , c und d werden bestimmt durch die Bedingungen:

- α) $w = U = (1 + \sigma)^{-1/2}$ im Unendlichen.
 σ ist die Kavitationszahl.
- β) z muß eine eindeutige Funktion von t sein.
- γ) der Abstand zwischen A und B = b , die halbe Breite der Platte.

Wir setzen nun $K = 1$ und betrachten a als Unbekannte. α) und β) geben

$$\sqrt{\frac{d-c}{d}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{c}} \sqrt{1 + \frac{a}{c}} \left[1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{c}} \sqrt{1 + \frac{a}{c}} \right]^{-1} \dots \dots \dots (4),$$

$$1 + \sigma = \left[\sqrt{\frac{a}{c}} + \sqrt{1 + \frac{a}{c}} \right]^2 \left[1 - \sqrt{\frac{a}{c}} \sqrt{1 + \frac{a}{c}} \right]^{-2} \dots \dots \dots (5).$$

γ) liefert die zweite Relation zwischen a und c .

β) Das *Riabouchinskysche* Modell ist wiedergegeben in Bild 1 b). Die Lösungsmethode ist der Methode unter α) analog. Die entsprechenden Formeln sind

$$\frac{d\Phi}{dt} = K \dots \dots \dots (6),$$

$$w = \frac{[\sqrt{t(c+a)} - \sqrt{a(t-c)}]^{1/2} [\sqrt{d(t-c)} - \sqrt{t(d-c)}]^{1/2}}{[\sqrt{t(c+a)} + \sqrt{a(t-c)}]^{1/2} [\sqrt{d(t-c)} + \sqrt{t(d-c)}]^{1/2}} \dots \dots \dots (7),$$

$$\sqrt{\frac{d-c}{d}} = \sqrt{\frac{a}{c+a}} \dots \dots \dots (8),$$

$$1 + \sigma = \left[\sqrt{\frac{a}{c}} + \sqrt{1 + \frac{a}{c}} \right]^2 \left[2 \sqrt{\frac{a}{c}} \sqrt{1 + \frac{a}{c}} + \sqrt{1 + 4 \frac{a}{c} \left(1 + \frac{a}{c} \right)} \right] \dots \dots (9).$$

ϵ) Wir entwickeln die Lösungen (2) und (7) nach Potenzen von $\sqrt{\frac{a}{c}}$. Vorausgesetzt wird, daß c endlich bleibt und a klein ist. Formel (2) gibt

$$w = 1 - \sqrt{\frac{a}{c}} \left[\sqrt{\frac{t-c}{t}} + \sqrt{\frac{t}{t-c}} \right] + \text{Glieder höherer Ordnung (G. h. O.)} \dots \dots (10).$$

Formel (7) liefert dasselbe Resultat. Die Entwicklung ist gleichmäßig konvergent, falls kleine Umgebungen der Punkte 0 und c vom Gebiete ausgeschlossen werden. (5) und (9) haben die folgende Entwicklung

$$1 + \sigma = 1 + 4 \sqrt{\frac{a}{c}} + \text{G. h. O.} \dots \dots \dots (11).$$

Weiter gilt für beide Modelle

$$dz = dt + \text{G. h. O.} \dots \dots \dots (12)$$

und

$$b = \frac{a}{2} (\pi + 4) + \text{G. h. O.} \dots \dots \dots (13).$$

Setzen wir $w = 1 + w_1 + \text{G. h. O.}$, dann folgt aus (10), (11) und (12)

$$w_1 = -\frac{\sigma}{4} \left[\sqrt{\frac{z-c}{z}} + \sqrt{\frac{z}{z-c}} \right] \dots \dots \dots (14).$$

Wir haben also denselben Ausdruck gefunden für die Störungsgeschwindigkeit wie in der linearisierten Theorie eines zwischen den Punkten 0 und c liegenden Kavitationsgebiets. Die Platte ist in der linearisierten Theorie durch eine Singularität dargestellt.

Die Darstellung der ebenen Platte durch eine Singularität in der linearisierten Theorie gibt die Möglichkeit, kompliziertere Probleme zu lösen. Dies ist z. B. gelungen im Falle der instationären Bewegung einer ebenen Platte mit Kavitation und für den Einfluß der Schwerkraft auf die Strömungen mit Kavitation.

Für den Widerstandsbeiwert gilt im Falle α)

$$C_D = \frac{2\pi}{\pi + 4} (1 + \sigma) \left\{ 1 + \frac{1}{8(\pi + 4)} \sigma^2 + \frac{13}{192(\pi + 4)} \sigma^3 + \dots \right\} \dots \dots \dots (15)$$

und im Falle β)

$$C_D = \frac{2\pi}{\pi + 4} (1 + \sigma) \left\{ 1 + \frac{1}{8(\pi + 4)} \sigma^2 - \frac{1}{8(\pi + 4)} \sigma^3 + \dots \right\} \dots \dots \dots (16).$$

Die linearisierte Theorie liefert also $\frac{2\pi}{\pi+4}$, den Wert, der aus der *Helmholtz-Kirchhoff*-schen Theorie bekannt ist. Dieses Ergebnis hängt damit zusammen, daß die Entwicklung nach $\sqrt{\frac{a}{c}}$ auch interpretiert werden kann als eine Approximation für große c , d. h. für lange Kavitationsgebiete. Im Falle $\sigma = 0$, unendliches Kavitationsgebiet, gibt die linearisierte Theorie also ein exaktes Resultat.

Literatur

- [1] G. Birkhoff, E. H. Zarantonello, Jets, wakes and cavities, New York 1957.
- [2] M. P. Tulin, Steady two-dimensional cavity flows about slender bodies. David W. Taylor Model Basin Report 834, Washington 1953.
- [3] M. S. Plesset, P. A. Shaffer, Cavity drag in two and three dimensions, NAVORD Report 1014, Inyokern 1949.
- [4] N. I. Muskhelishvili, Singular Integral equations, Groningen 1953.

Anschrift: J. A. Geurst, Delft, Van Foreestweg 181, Niederlande

Zur Berechnung der Potentialströmung um beliebige Einzel- und Gitterprofile unter Verwendung der Elektroanalogie

Von M. Hackeschmidt

Die Berechnung der Strömung um beliebige Einzel- und Gitterprofile mittels konformer Abbildung ist im allgemeinen nur näherungsweise möglich, weil die Abbildungsfunktion von der Profilebene ζ zur Kreisebene z nicht bekannt ist.

Die bei der Ermittlung der Abbildungsfunktion auftretenden Schwierigkeiten lassen sich bei Verwendung des elektrolytischen Troges umgehen.

Die Analogie zwischen der hydrodynamischen und elektrodynamischen Potentialfunktion liefert wegen $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ die Lösung der Randwertaufgabe für die zirkulationsfreie Umströmung des Profils, wobei über das durch Messung gewonnene Geschwindigkeitspotential die zugehörige Geschwindigkeitsverteilung $v = \partial\Phi/\partial s$ bestimmt wird. Zu dieser Strömung wird durch Erfüllung der *Kutta*-Bedingung $w_H = 0$ die Größe der erforderlichen Zirkulation ermittelt. Durch Überlagerung der beiden Geschwindigkeiten ergibt sich schließlich die Geschwindigkeitsverteilung der zirkulationsbehafteten Strömung w und somit die Lösung des vorliegenden Problems. Da sich bei verschiedenen Strömungszuständen die Geschwindigkeiten in entsprechenden Punkten der Bildkontur z und der Profilkontur ζ verhalten wie

$$\frac{v_z}{w_z} = \frac{v_\zeta}{w_\zeta} \left| \frac{d\zeta/dz}{dz/d\zeta} \right| = \frac{v_\zeta}{w_\zeta} \quad \dots \quad (1),$$

wird die Umrechnung nicht in der Profilebene ζ , sondern in der Bildebene z vorgenommen. Eine Normierung des Potentialverlaufes am Kreis führt unter Verwendung der ausgezeichneten Werte Φ_{\max} und Φ_{\min} , den Extremwerten der Potentialfunktion auf dem Konturrand, sowie Φ_H , dem Potentialwert an der Profilhinterkante (Index H), zu recht einfachen Umrechnungsformeln:

Für das unter dem Winkel α angeströmte Einzelprofil gilt [1]:

$$w_\zeta = \left[1 - \frac{\sqrt{(\Phi_{\max} - \Phi_H)(\Phi_H - \Phi_{\min})} + \tan \alpha (\Phi_H - \Phi)}{\sqrt{(\Phi_{\max} - \Phi)(\Phi - \Phi_{\min})}} \right] \cos \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial s} \quad \dots \quad (2).$$

Für das unter dem Winkel β_1 angeströmte Gitterprofil ergibt sich [2]:

$$w_\zeta = \left[1 + \frac{\cosh \ln k - \cos \varphi}{2 \sin \varphi \coth \ln k} \cot \beta_1 - \frac{\cosh \ln k + \cos \varphi}{2 \sin \varphi \coth \ln k} \cot \beta_2 \right] \frac{\partial \Phi}{\partial s} \quad \dots \quad (3).$$

Bei (3) gilt für den Polarwinkel in der Kreisebene z

$$\cos \varphi = \frac{\tanh \left\langle \frac{\pi}{2 t v_n} (2 \Phi - \Phi_{\max} - \Phi_{\min}) \right\rangle}{\tanh \left\langle \frac{\pi}{2 t v_n} (\Phi_{\max} - \Phi_{\min}) \right\rangle} \quad \dots \quad (4).$$

und

$$\cosh \ln k = \coth \left\langle \frac{\pi}{2 t v_n} (\Phi_{\max} - \Phi_{\min}) \right\rangle \dots \dots \dots (5).$$

Für den Abströmwinkel errechnet man:

$$\cot \beta_2 = \frac{\cosh \ln k - \cos \varphi_H}{\cosh \ln k + \cos \varphi_H} \cot \beta_1 - \frac{2 \sin \varphi_H \coth \ln k}{\cosh \ln k + \cos \varphi_H} \dots \dots \dots (6)$$

(t : Gitterteilung; $v_n = w_n$: Komponente der An- und Abströmgeschwindigkeit rechtwinklig zur Gitterfront).

Dieses Verfahren wurde zur Berechnung der Strömung um zahlreiche Einzel- und Gitterprofile, insbesondere um dicke Profile und Profile mit großer Wölbung erfolgreich angewandt. Es liefert in verhältnismäßig kurzer Zeit Resultate von recht guter Genauigkeit.

Literatur

- [1] M. Hackeschmidt, Zur konformen Abbildung der Strömung um beliebige Tragflügelprofile unter Verwendung des elektrolytischen Troges. Maschinenbautechnik, Mai 1959.
- [2] M. Hackeschmidt, Zur Berechnung der Potentialströmung um beliebige ebene gerade Profilgitter unter Verwendung des elektrolytischen Troges. Maschinenbautechnik, Juli 1959.

Anschrift: Dipl.-Ing. Manfred Hackeschmidt, Radebeul I b. Dresden, Einsteinstr. 12

Über ein Randwertproblem aus der Aerodynamik eines Gitters

Von E. Meister

In der Aerodynamik eines Axialverdichters, bei dem ein Schaufelkranz in einem Ringkanal kleiner Höhe umläuft und dessen N Schaufeln harmonische Schwingungen ausführen, gelangt man durch Abwicklung in eine Ebene zu dem folgenden Problem:

In einer komplexen $z = x + i y$ -Ebene sei ein unendliches, gestaffeltes Streckengitter analytisch gegeben durch

$$z = z_m[\xi] = \xi + 2 i T \cdot m \cdot e^{-i \lambda} \quad \text{mit} \quad -1 \leq \xi \leq +1, \quad m \text{ ganz} \dots \dots (1).$$

λ ist dabei der Staffelungswinkel und T die Teilung des Gitters. Dieses Gitter werde nun parallel zur positiven x -Achse von einer inkompressiblen, reibungsfreien Flüssigkeit angeströmt. Je N aufeinanderfolgende Streckenprofile $z_m[\xi]$ sollen unabhängig voneinander harmonische Schwingungen kleiner Amplitude und gleicher Frequenz ausführen. Sehen wir von dem Einfluß der freien Wirbel ab, die in die Kielwasserbereiche der Schaufeln abschwimmen und an den Profilen einen Abwind induzieren, dann haben wir für die Amplitude des gesuchten Störgeschwindigkeitsfeldes das folgende funktionentheoretische Problem vorliegen:

Gesucht ist ein komplexes Geschwindigkeitsfeld $W(z)$, das in der z -Ebene außerhalb des Gitters holomorph sei. Es genüge den Bedingungen:

1. $W(z)$ besitze die Periode $2 i T \cdot N \cdot e^{-i \lambda}$.
2. Auf dem k -ten Profil besitze der Imaginärteil von $W(z)$ die Randwerte $-q_k(x)$.
3. Das Feld verschwinde weit vor dem Gitter, d. h. für $x \rightarrow -\infty$, und es bleibe beschränkt weit dahinter, d. h. für $x \rightarrow +\infty$.
4. $W(z)$ besitze an den Vorderkanten $z_k[-1]$ höchstens integrierbare Singularitäten und an den Hinterkanten $z_k[+1]$ auf Grund der Kuttaschen Abflußbedingungen nur logarithmische Singularitäten.

Versucht man dieses Feld dadurch zu bestimmen, daß man auf den Streckenprofilen Wirbel verteilt, so gelangt man zu einem System von N singulären Integralgleichungen vom Cauchy-Typus für die Wirbeldichten. Es gelang bisher noch nicht, dieses System im allgemeinen Falle zu lösen.

Wir wollen daher die z -Ebene konform auf eine $w = w_1 + i w_2$ -Ebene so abbilden, daß das gestaffelte Streckengitter in ein horizontales übergeht. Die Abbildungsfunktion lautet:

$$z = -\frac{2 T}{\pi} \cos \lambda \cdot \left\{ \log \frac{\cos \pi w + \sqrt{\cos^2 \pi w - \cos^2 \pi \beta}}{\cos \pi \beta} - \pi \cdot \operatorname{tg} \lambda \cdot w \right\} \dots \dots (2).$$

Hierbei ist β ein Parameter zwischen 0 und $1/2$, der mit den Gittergrößen gekoppelt ist vermöge

$$\frac{\pi}{2 T} = \cos \lambda \cdot \log \frac{\sin \pi \beta \cdot \cos \lambda + \sqrt{1 - \sin^2 \pi \beta \cdot \sin^2 \lambda}}{\cos \pi \beta} + \sin \lambda \cdot \operatorname{arc} \sin_H (\sin \pi \beta \cdot \sin \lambda) \quad (3).$$

Das horizontale Gitter in der Bildebene wird dann beschrieben durch

$$w = w_1 + i w_2, \quad m - \beta \leq w_1 \leq m + \beta, \quad w_2 = 0, \quad m \text{ ganz} \dots \dots \dots (4).$$

Bei der konformen Abbildung gehen die Vorderkanten der Schaufeln in der z -Ebene über in die Punkte $w = m - w_0 = m - \frac{1}{\pi} \arcsin s$, $s = \sin \pi \beta \cdot \sin \lambda$ am oberen Ufer und die Hinterkanten in die Punkte $w = m + w_0$ am unteren Ufer. Übertragen wir die Randwerte der Normalgeschwindigkeiten an den Profilen in die w -Ebene, so erkennt man sofort, daß die neuen Randwerte $r_k^+(w_1)$ und $r_k^-(w_1)$ im allgemeinen auf den beiden Ufern der Schlitzes der w -Ebene nicht übereinstimmen und auch integrable Singularitäten in $w = m \pm \beta$ haben können, obwohl die $q_k(x)$ stetig vorausgesetzt sind. Wegen der Linearität des Randwertproblems zerlegen wir das in die w -Ebene transformierte Problem in zwei Teilprobleme, indem wir die neuen Randwerte bilden:

$$\begin{aligned} r_{k1}(w_1) &= \frac{1}{2} (r_k^+(w_1) + r_k^-(w_1)) \\ r_{k2}(w_1) &= \frac{1}{2} (r_k^+(w_1) - r_k^-(w_1)) \end{aligned} \quad k - \beta \leq w_1 \leq k + \beta \dots \dots \dots (5).$$

Dann werden zwei komplexe Geschwindigkeitsfelder $\Omega_1(w)$ und $\Omega_2(w)$ mit der Periode N gesucht, die in der komplexen w -Ebene außerhalb des horizontalen Gitters holomorph sind und den Bedingungen genügen:

1. $\lim_{w_2 \rightarrow +0} \operatorname{Im} \Omega_1(w) = \lim_{w_2 \rightarrow -0} \operatorname{Im} \Omega_1(w) = -r_{k1}(w_1)$
 $\lim_{w_2 \rightarrow +0} \operatorname{Im} \Omega_2(w) = \lim_{w_2 \rightarrow -0} \operatorname{Im} \Omega_2(w) = -r_{k2}(w_1)$
 für $k - \beta < w_1 < k + \beta$, $w_2 = 0$, $k = 0, 1, \dots, N-1$.
2. $\Omega_1(w)$ und $\Omega_2(w)$ sollen für $|w_2| \rightarrow \infty$ beschränkt bleiben, aber $\Omega_1(w) + \Omega_2(w)$ soll für $w_2 \rightarrow +\infty$ gegen Null streben.
3. $\Omega_1(w)$, $\Omega_2(w)$ sollen in $w = m \pm \beta$ und $w = m \pm w_0$, m ganz, höchstens integrable Singularitäten besitzen und $[\Omega_1(w) + \Omega_2(w)] \cdot \frac{dw}{dz} = O(|\log |w - m - w_0||)$ sein bei Annäherung von w an die Bildpunkte der Hinterkanten der Profile.

Das Feld $\Omega_2(w)$ können wir sehr leicht dadurch bestimmen, daß wir Quellen auf den Schlitzes $m - \beta \leq w_1 \leq m + \beta$, $w_2 = 0$, anbringen, deren Stärke sich mit der Periode N wiederholt. Auf Grund der Plemelj'schen Formeln läßt sich die Quellstärke sofort aus den Randwerten $r_{k2}(w_1)$ ermitteln und das Quellfeld ist gegeben durch

$$\Omega_2(w) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{w=k-\beta}^{k+\beta} r_{k2}(w) \cdot \cotg \frac{\pi}{N} (w - \omega) d\omega \dots \dots \dots (6).$$

Dieses Feld verschwindet für $|w_2| \rightarrow \infty$, da die Gesamtquellstärken verschwinden müssen.

Das Feld $\Omega_1(w)$ könnten wir durch Wirbelbelegungen auf den Schlitzes erzeugen. Die allgemeine Lösung des entstehenden Systems singulärer Integralgleichungen für die Wirbeldichten ist von K. Nickel (Math. Zeitschr. 58, S. 49) angegeben worden. Wir wollen hier jedoch anders vorgehen.

Für das Feld $\Omega_1(w)$ (als Wirbelfeld) gilt die Beziehung

$$\Omega_1(w) = -\overline{\Omega_1(\bar{w})} \dots \dots \dots (7).$$

Aus den Randbedingungen an den Schlitzes gewinnen wir dann das *Hilbert-Problem*

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1(w_1 + i \cdot 0) &= -\Omega_1(w_1 - i \cdot 0) - 2i \cdot r_{k1}(w_1) & \text{für } k - \beta < w_1 < k + \beta, \\ \Omega_1(w_1 + i \cdot 0) &= \Omega_1(w_1 - i \cdot 0) & \text{für } k + \beta < w_1 < k + 1 - \beta \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

zusammen mit den schon angegebenen Bedingungen für $\Omega_1(w)$. Zur Lösung nehmen wir der Einfachheit halber an, N sei eine gerade Zahl. Eine Lösung des homogenen *Hilbert-Problems* wird durch

$$\Omega_1^0(w) = \frac{T \cdot \cos \lambda}{N \cdot i} (\sin \pi (w + \beta) \cdot \sin \pi (w - \beta))^{-1/2} \dots \dots \dots (9)$$

gegeben. Diese verhält sich für $|w_2| \rightarrow \infty$ wie $O(e^{-\pi w_2})$. Ist $X(w)$ irgendeine homogene Lösung, dann sieht man sofort, daß die Funktion $H(w) = X(w)/\Omega_1^0(w)$ eine ganze periodische Funktion mit der Periode N sein muß. Da $X(w)$ für $|w_2| \rightarrow \infty$ beschränkt bleiben muß, so kann die *Fourier-*

Reihe von $H(w)$ nur endlich viele von Null verschiedene Koeffizienten besitzen. Berücksichtigen wir noch die Beziehung (7), dann erhalten wir die allgemeine Lösung des homogenen Hilbertproblems in Gestalt der Formel

$$X(w) = \frac{T \cdot \cos \lambda}{N \cdot i} \cdot \frac{c_0 + \sum_{v=1}^{N/2} c_v \cdot \cos \frac{2\pi}{N} v w + d_v \cdot \sin \frac{2\pi}{N} v w}{\sqrt{\sin \pi (w + \beta) \cdot \sin \pi (w - \beta)}} \dots \dots \dots (10)$$

mit $N + 1$ beliebigen reellen Konstanten.

Eine spezielle Lösung des inhomogenen Hilbert-Problems gewinnen wir unter Berücksichtigung der Periodizität und der Plemelj'schen Formeln zu

$$\Omega_1(w) = \frac{1}{N} \cdot (\sin^2 \pi \beta - \sin^2 \pi w)^{-1/2} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \int_{\omega=k-\beta}^{k+\beta} r_{k1}(\omega) \times (\sin^2 \pi \beta - \sin^2 \pi \omega)^{+1/2} \cdot \cotg \frac{\pi}{N} (w - \omega) d\omega \dots \dots \dots (11).$$

Die noch freien $N + 1$ reellen Konstanten der allgemeinen inhomogenen Lösung, die man durch Addition der Formeln (10) und (11) erhält, müssen nun aus den Bedingungen bestimmt werden, daß das Gesamtgeschwindigkeitsfeld $\Omega(w)$ für $w_2 \rightarrow +\infty$ verschwindet und $\Omega(w) \cdot \frac{dw}{dz}$ für $w \rightarrow m + w_0 - i \cdot 0$ höchstens logarithmische Singularitäten besitzt.

Ein konstantes Feld parallel zur reellen w -Achse beeinflusst die Randbedingungen im Endlichen nicht. Wählen wir $d_{N/2} = 0$ und für dieses Feld die Funktion

$$\Omega_1^1(w) = \frac{T \cdot \cos \lambda}{N} \cdot c_{N/2} \dots \dots \dots (12)$$

dann ist die erste Bedingung für $\Omega(w) = \Omega_1(w) + \Omega_2(w) + \Omega_1^1(w)$ erfüllt und es verbleiben nur noch N Konstanten. Lassen wir nun w gegen die Bildpunkte der Hinterkanten der Profile streben, dann resultiert aus der O -Bedingung dort ein System von N linearen Gleichungen für die N reellen Konstanten c_v und d_v . Lösen wir dieses System auf — was allgemein durchführbar ist — und setzen die Werte der c_v , d_v ein, dann gewinnen wir das gesuchte Geschwindigkeitsfeld $\Omega(w)$ in der Form

$$\begin{aligned} \Omega(w) = & -\frac{1}{N i} (\sin \pi (w + \beta) \cdot \sin \pi (w - \beta))^{-1/2} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\sigma=-\beta}^{+\beta} \left[r_{k1}(\sigma + k) \cdot (\sin^2 \pi \beta - \sin^2 \pi \sigma)^{1/2} \right. \\ & \times \left(\frac{\sin \frac{\pi}{N} \{(N-1)w + \sigma + k - N \cdot w_0\}}{\sin \frac{\pi}{N} (w - k - \sigma)} + \frac{\cos \pi w}{\sin \pi \beta \cdot \cos \lambda + \cos \pi w_0} \right) - r_{k2}(\sigma + k) \cdot \sin \pi \beta \cdot \cos \lambda \\ & \times \left(\frac{\sin \frac{\pi}{N} \{(N-1)(w - \sigma) + k\}}{\sin \frac{\pi}{N} (w - k - \sigma)} + \frac{\cos \pi (\sigma - w_0) \cdot \cos \pi w}{\sin \pi \beta \cdot \cos \lambda + \cos \pi w_0} \right) \left. \right] \frac{d\sigma}{\sin \pi (\sigma - w_0)} \\ & + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\sigma=-\beta}^{+\beta} \left[r_{k2}(\sigma + k) \cdot \left(\cotg \frac{\pi}{N} (w - k - \sigma) \cdot \sin \pi (\sigma - w_0) + \frac{\sin \pi \beta \cdot \cos \lambda \cdot \cos \pi (\sigma - w_0)}{\sin \pi \beta \cdot \cos \lambda + \cos \pi w_0} \right) \right. \\ & \left. - r_{k1}(\sigma + k) \cdot \frac{(\sin^2 \pi \beta - \sin^2 \pi \sigma)^{+1/2}}{\sin \pi \beta \cdot \cos \lambda + \cos \pi w_0} \right] \cdot \frac{d\sigma}{\sin \pi (\sigma - w_0)} \dots \dots \dots (13). \end{aligned}$$

Ist N eine ungerade Zahl, dann kommen wir zum gleichen Ergebnis. Obwohl das Geschwindigkeitsfeld $W(z)$ nur in der Bildebene in der Form (13) bekannt ist, so lassen sich dennoch die wichtigen aerodynamischen Größen wie Gesamtauftrieb, -moment usw. berechnen.

Zusatz bei der Korrektur:

Der vorstehende Bericht stellt einen Auszug aus der Dissertation des Verfassers: „Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes und der Luftkräfte an einem schwingenden, gestaffelten Gitter“, Saarbrücken 1958, dar.

Anschrift: Dr. Erhard Meister, Riegelsberg (Saar), Rathausstr. 2a

Fehlerabschätzungen zu Näherungslösungen der Grenzschicht-Differentialgleichungen

Von K. Nickel

Es gibt bis heute schon viele verschiedene Verfahren, um Lösungen und Näherungslösungen der Prandtl'schen Grenzschicht-Differentialgleichungen zu bestimmen. Wegen der unvermeidlichen Rundungsfehler sind auch die sogenannten 'exakten Lösungen' — wenigstens soweit sie numerisch gewonnen sind — nur Näherungslösungen. Es wäre daher wünschenswert, wenn man schon ohne Kenntnis der exakten Lösung allgemeine Fehlerschranken für solche Näherungslösungen angeben könnte. Dies gelingt für den Fall der laminaren stationären Grenzschicht eines inkompressiblen Mediums mit Hilfe eines Satzes von Nagumo-Westphal; dabei sind mitbewegte Wand und beliebiges Absaugen und Abblasen an der Wand zugelassen. Besonders einfach sind die Verhältnisse im Gleichdruck- und Druckabfall-Gebiet, wo sich als Schranke für den Fehler eine geschlossene Quadraturformel angeben läßt, die nur noch den 'Defekt' der Näherungslösung enthält. Auch für die abgeleiteten Größen Wandschubspannung, Verdrängungsdicke und Impulsverlustdicke lassen sich Fehlerabschätzungen angeben. Als Beispiel wurden Näherungslösungen der *v. Kármán-Pohlhausenschen* Art für die Strömung um den Kreiszylinder abgeschätzt. Ein ausführlicher Bericht soll demnächst an anderer Stelle veröffentlicht werden.

Anschrift: Doz. Dr. Karl Nickel, Karlsruhe, Brettenerstr. 9

Über das Wandgesetz turbulenter Grenzschichten bei kompressiblen Strömungen

Von J. C. Rotta*)

Das bekannte Ähnlichkeitsgesetz für die turbulente Strömung nahe der Wand wird für kompressible Medien im Hinblick auf den Einfluß von Machscher Zahl und Wärmeübergang erweitert. Als zusätzliche Parameter muß man die Wärmestromdichte q_w an der Wand (positiv bei Wärmeaufnahme der Wand) und die Wandtemperatur T_w (bzw. die zugehörige Schallgeschwindigkeit $a_w = \sqrt{(\gamma - 1) c_p T_w}$; c_p = spez. Wärme bei konstantem Druck) einführen. Die dimensionsbehafteten Größen lassen sich zu den Parametern

$$\begin{aligned} \text{Machsche Zahl } M_\tau &= u_\tau / a_w & \text{und} \\ \text{Wärmestromzahl } \beta_q &= q_w / \rho_w c_p T_w u_\tau \end{aligned}$$

mit der Schubspannungsgeschwindigkeit $u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho_w}$ zusammenfassen. Hiermit ergibt sich das Ähnlichkeitsgesetz für Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung zu

$$\bar{u} = u_\tau f(\eta_w, M_\tau, \beta_q), \quad \bar{T} = T_w \varphi(\eta_w, M_\tau, \beta_q) \quad \dots \quad (1).$$

Hierbei sind f und φ universelle Funktionen von $\eta_w = \frac{y u_\tau}{\nu_w}$, M_τ und β_q . Außerdem spielen auch die Prandtl'sche Zahl $c_p \mu / \lambda$, das Verhältnis γ der spez. Wärmen und das Gesetz $\mu(T)$, nach welchem sich die Zähigkeit μ mit der Temperatur T ändert, eine Rolle.

Für die Strömung sind die Kontinuitätsgleichung, die Navier-Stokesschen Gleichungen, die Energiegleichung und die Zustandsgleichung der Gase maßgebend. Mit den Vereinfachungen für die Wandströmung dürfen in diesen Gleichungen alle Ableitungen von Mittelwerten nach x und z vernachlässigt werden, so daß die Gleichungen ohne Einführung weiterer Vereinfachungen über y integriert werden können. Das so entstehende Gleichungssystem kann nur durch spezielle Annahmen über den Turbulenzmechanismus weiter behandelt werden. Um eine Diskussionsgrundlage zu schaffen, und die verschiedenen Einflüsse zu klären, wurden unter vereinfachenden Annahmen Rechnungen durchgeführt. Die Ergebnisse zeigen einen bemerkenswerten Effekt der beiden Parameter M_τ und β_q auf die Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung. Der Vergleich mit Meßergebnissen [1], [2] ergab, daß die Rechnungsannahmen im vollturbulenten Gebiet die wirklichen Verhältnisse ganz gut beschreiben; im Übergangsbereich in die zähe Unterschicht bestehen aber Unterschiede zwischen Rechnungs- und Versuchsergebnissen.

*) Aerodynamische Versuchsanstalt, Göttingen

Bei Anwendung des Wandgesetzes auf Grenzschichtprobleme sind hauptsächlich die Geschwindigkeits- und Temperaturverteilungen im vollturbulenten Bereich interessant. Hierfür liefern die vorliegenden Untersuchungen brauchbare Abschätzungsformeln. Es ergibt sich für die Geschwindigkeitsverteilung

$$\bar{u} = u_\tau \left[\frac{\sqrt{C_1}}{\sqrt{\sigma_t \frac{\gamma-1}{2} M_\tau}} \sin \left\{ \sqrt{\sigma_t \frac{\gamma-1}{2} M_\tau} \left(\frac{1}{\kappa} \ln \eta_w + C_2 \right) \right\} + \frac{\beta_q}{(\gamma-1) M_\tau^2} \left\{ 1 - \cos \left[\sqrt{\sigma_t \frac{\gamma-1}{2} M_\tau} \left(\frac{1}{\kappa} \ln \eta_w + C_2 \right) \right] \right\} \right] \dots \dots (2)$$

und für die zugehörige Temperaturverteilung

$$\bar{T} = T_w \left[\sigma_t \beta_q \bar{u}/u_\tau - \sigma_t \frac{\gamma-1}{2} M_\tau^2 \left(\frac{\bar{u}}{u_\tau} \right)^2 + C_1 \right] \dots \dots \dots (3).$$

Hierbei ist $\kappa (= 0,4)$ eine universelle Konstante und $\sigma_t = A_\tau/A_q (= 0,9)$ das Verhältnis der Austauschgrößen für turbulenten Impuls- und Wärmeaustausch. Die Konstanten C_1 und C_2 wurden empirisch aus den vorliegenden Meßergebnissen bestimmt:

$$C_1 = 1 - 3,4 \beta_q - 0,2 M_\tau \dots \dots \dots (4)$$

$$C_2 = 5,2 + 70 \beta_q + 5 M_\tau \dots \dots \dots (5)$$

Für den Grenzfall $\beta_q \rightarrow 0$ und $M_\tau \rightarrow 0$ geht Gleichung (2) in das bekannte logarithmische Wandgesetz

$$\bar{u} = u_\tau \left(\frac{1}{\kappa} \ln \eta + 5,2 \right) \dots \dots \dots (6)$$

über, und aus (3) folgt $\bar{T} = T_w$.

Literatur

- [1] R. K. Lobb, E. M. Winkler, J. Persh, Experimental investigation of turbulent boundary layers in hypersonic flow. NAVORD Rep. 3880, 40 pp. U. S. Naval Ord. Lab. (White Oak, Md.) (1955).
 [2] F. K. Hill, Boundary-layer measurements in hypersonic flow. J. Aero. Sci. 23 (1956), pp. 35—42.

Anschrift: J. C. Rotta, Göttingen, Zeppelinstr. 3

Berechnung von symmetrischen Profilströmungen mit beschränkten Überschallbereichen

Von E. Schincke

Betrachtet wird eine ebene zur Anströmrichtung symmetrische Strömung einer idealen kompressiblen Flüssigkeit. Im Strömungsgebiet seien weder Quellen noch Wirbel vorhanden. Stromfunktion und Potential sind in der $w\vartheta$ -Ebene (w Geschwindigkeitsbetrag, ϑ Stromwinkel) bekanntlich durch die Beziehungen

$$\Phi_w = -\frac{\varrho}{\varrho_r} \frac{K(w)}{w} \Psi_\vartheta, \quad \Phi_\vartheta = \frac{\varrho_r}{\varrho} w \Psi_w \dots \dots \dots (1)$$

miteinander verknüpft, wobei zur Abkürzung

$$K(w) = \left(\frac{\varrho_r}{\varrho} \right)^2 \left(1 - \frac{w^2}{a^2} \right) \dots \dots \dots (2)$$

gesetzt wurde. Die Dichte ϱ sei eine positive stetig differenzierbare Funktion von w allein. Der Wert $\varrho_r = \varrho(0)$ kennzeichnet die Ruhedichte, und die Schallgeschwindigkeit a ist durch

$$a^2 = -\frac{\varrho}{d\varrho} \frac{dw}{dw} \dots \dots \dots (3)$$

erklärt. Faßt man w, ϑ als Polarkoordinaten auf, so geht das System (1) mit Hilfe der Radialstreckung

$$\omega(w) = a^* \exp \int_{a^*}^w \frac{\varrho}{\varrho_r} \frac{dw}{w} \quad \vartheta = \vartheta \quad (a^* \text{ kritische Geschwindigkeit}) \quad (4)$$

in

$$\Phi_w = -\frac{K(\omega)}{\omega} \Psi_\vartheta, \quad \Phi_\vartheta = \omega \Psi_\omega \quad (5)$$

mit

$$K(\omega) = K(w) \quad (6)$$

über. Im Gegensatz zu Tomotika-Tamada [1] bleibt in der Transformation (4) der Stromwinkel ungeändert, so daß außer im Bildpunkt der Anströmung keine weiteren Verzweigungssingularitäten im Strömungsgebiet einschließlich des Randes auftreten. Nach Elimination von $\Phi(\omega, \vartheta)$ ergibt sich daraus für die Stromfunktion $\Psi(\omega, \vartheta)$ die Differentialgleichung

$$\Psi_{\omega\omega} + \frac{1}{\omega} \Psi_\omega + \frac{K(\omega)}{\omega^2} \Psi_{\vartheta\vartheta} = 0 \quad (7).$$

Für $K(\omega)$ wählen wir den Ausdruck

$$K(\omega) = 1 - \left(\frac{\omega}{a^*} \right)^2 \quad (8)$$

und legen damit unter Berücksichtigung von (2), (6) und der Bernoullischen Gleichung eine Druck-Dichte-Beziehung fest, die im kritischen Zustandspunkt mit dem Funktionswert und der Tangentenrichtung der Poissonschen Adiabate übereinstimmt. In Bild 1 ist diese Beziehung (—) zusammen mit der Poissonschen Adiabate (---) eingetragen. In einer kleinen Umgebung der Stelle $\frac{\varrho^*}{\varrho_r}$ bleibt zwar die zugehörige Schallgeschwindigkeit nicht mehr reell, jedoch zeigen die berechneten Profilströmungen dort Hodographenbilder, die mit denjenigen einer inkompressiblen Strömung asymptotisch übereinstimmen. Die Stromfunktion $\Psi(\omega, \vartheta)$ spalten wir in üblicher Weise in $\Psi = \hat{\Psi} + \chi$ auf. Für den singulären Bestandteil $\hat{\Psi}$ ergibt sich ähnlich wie bei Tomotika-Tamada [1]

$$\hat{\Psi} = \text{Im} \frac{1}{1 - \frac{\omega}{a^*} \cos \Theta(\omega, \vartheta; g)} \quad (9).$$

Dabei genügt die komplexe Funktion $\Theta(\omega, \vartheta; g)$ mit dem freien Parameter g der Gleichung

$$i \ln g + \vartheta + \Theta - \frac{\omega}{a^*} \sin \Theta = 0 \quad (10).$$

Erfolgt die Anströmung unterkritisch mit der Geschwindigkeit w_0 , so besitzt $\hat{\Psi}$ nur dann im Bildpunkt $\omega_0 = \omega(w_0)$, $\vartheta = 0$ der Anströmung eine der inkompressiblen Strömung entsprechende Singularität, wenn $g = e^{-\beta} \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$ mit $\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{w_0}{a^*} \right)^2}$ gewählt wird. Den regulären Bestandteil χ setzen wir in der Form

$$\chi = \text{Im} \left\{ i c \frac{\omega}{a^*} \sin \Theta + i \sum_{\nu=1}^n d_\nu J_\nu \left(\nu \frac{\omega}{a^*} \right) e^{-i \nu \vartheta} \right\} \quad (11)$$

mit reellen Konstanten c und d_ν an. Ein einfaches Beispiel einer Profilströmung mit einem Stau- und einer endlichen Geschwindigkeit an der Hinterkante ergibt sich bereits für $d_\nu = 0$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) und $c = \frac{1-g^2}{1+g^2}$.

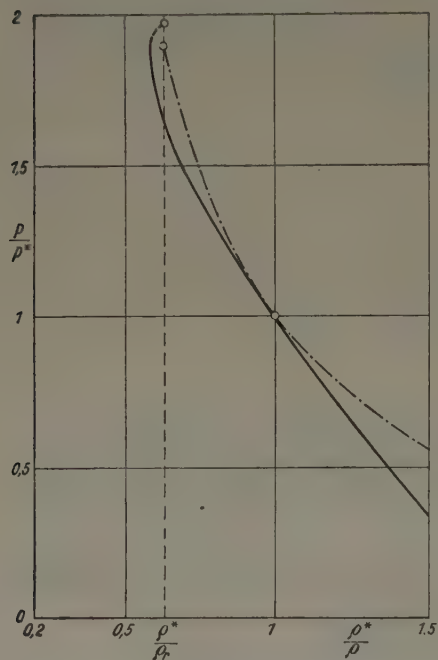


Bild 1
Die zu (8) gehörige Druck-Dichte-Beziehung (—)
im Vergleich mit der Poissonschen Adiabate (---)

Das zugehörige Potential $\Phi(\omega, \vartheta)$ kann mit Hilfe von (5) ebenfalls in geschlossener Form berechnet werden:

$$\Phi = -\frac{\omega}{a^*} \operatorname{Im} \left\{ \frac{\sin \Theta}{1 - \frac{\omega}{a^*} \cos \Theta} - i c \left(\frac{1}{2} \frac{\omega}{a^*} + \cos \Theta \right) \right\} + \text{const.} \quad (12).$$

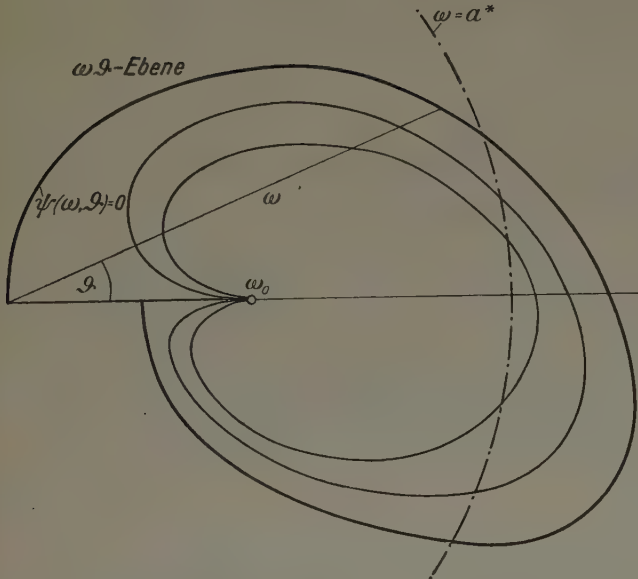


Bild 2. Stromlinienbild der Profilströmung für $\frac{w_0}{a^*} = 0,426$ in der $\omega\vartheta$ -Ebene (oberes Blatt)

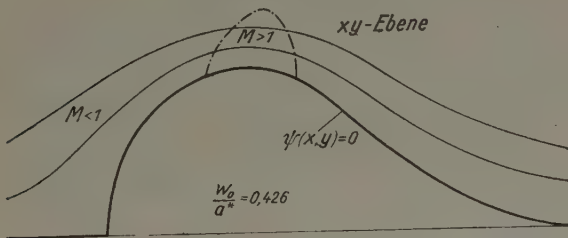


Bild 3. Stromlinienbild der Profilströmung für $\frac{w_0}{a^*} = 0,426$ in der xy -Ebene (Oberseite)

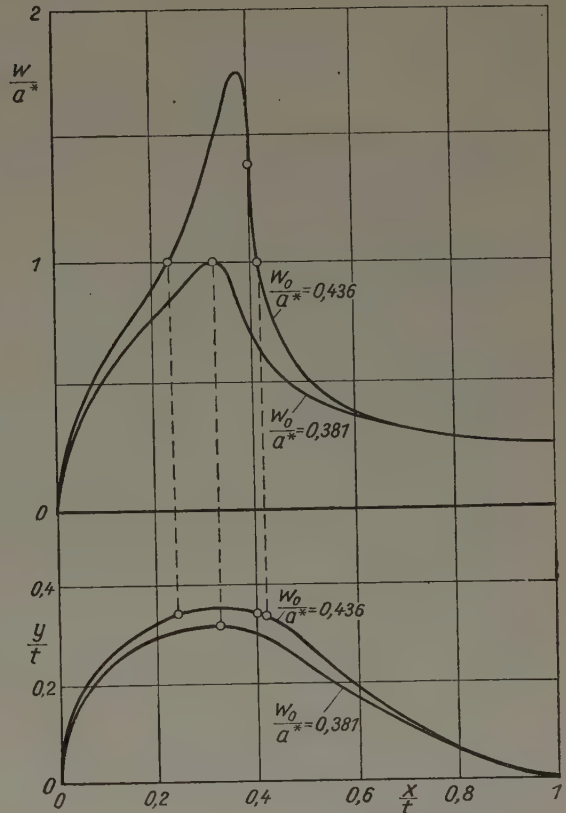


Bild 4. Profilkonturen für $\frac{w_0}{a^*} = 0,381$ und $\frac{w_0}{a^*} = 0,436$ mit den zugehörigen Geschwindigkeitsverteilungen

Die Rückabbildung der Stromlinien $\Psi = \text{const.}$ in die Strömungsebene mit den kartesischen Koordinaten x, y wird durch die bekannten Beziehungen

$$x = \int_0^\vartheta \left[\frac{\cos \vartheta}{w(\omega)} \right]_{\Psi = \text{const.}} d\Phi \quad y = \int_0^\vartheta \left[\frac{\sin \vartheta}{w(\omega)} \right]_{\Psi = \text{const.}} d\Phi \quad (13)$$

geliefert. Bild 2 zeigt das obere Blatt des zweiblättrigen Strömungsgebietes der $\omega\vartheta$ -Ebene mit dem Verzweigungspunkt $\omega = \omega_0, \vartheta = 0$ bei der kritischen Anström-Mach-Zahl $\frac{w_0}{a^*} = 0,426$. Die Strömung auf der Oberseite der symmetrischen Profilkontur $\Psi(x, y) = 0$ veranschaulicht Bild 3. Der Geschwindigkeitsvektor bleibt sowohl beim Durchgang durch die Schalllinie (— · — · —) als auch im überkritischen Bereich stetig. Bei $\frac{w_0}{a^*} = 0,381$ wird die Schallgeschwindigkeit nur in einem Punkt der zugehörigen Profilkontur erreicht. Steigert man die kritische Anström-Mach-Zahl auf den Wert $\frac{w_0}{a^*} = 0,436$, so ergibt sich in einem Punkt auf der Profilkontur innerhalb des Überschallbereichs ein unendliches Geschwindigkeitsgefälle (vgl. Bild 4). Bei noch höheren

Anström-Mach-Zahlen treten *Tollmische* Grenzlinien im Strömungsgebiet auf. Das Beispiel steht nicht im Widerspruch zu den Ergebnissen von C. Morawetz [2], da es keine Rückschlüsse auf die Existenz von stetigen Potentialströmungen um hinreichend benachbarte Profilströmungen bei gleicher Anström-Mach-Zahl zuläßt.

Literatur

- [1] S. Tomotika und K. Tamada, Studies on two-dimensional transonic flows of a compressible fluid. — Part III, Quart. of Appl. Math. 9 (1951), S. 129—147.
 [2] C. S. Morawetz, On the non-existence of continuous transonic flows past profiles I, Comm. Pure and Appl. Math. 9 (1956), S. 45—68.

Anschrift: Dr. E. Schincke, Halle /Saale, Händelstr. 11

Berechnung einer einfachen Destillationskolonne für ein Mehrkomponentengemisch

Von O. H. Schmidt

In der chemischen Technik nehmen die Destillationskolonnen einen bedeutenden Platz ein. Ihre allgemeine Berechnung scheitert daran, daß die hierfür nötigen allgemeingültigen Gesetze nicht bekannt sind.

Im vorliegenden, technisch schwierigen Spezialfall der Destillation eines Gemisches von 4 Isomeren lassen sich aber Gesetze angeben, nach denen eine Berechnung möglich ist. Sie sind: das *Raoultische* und das *Daltonsche* Gesetz und die Konstanz der relativen Flüchtigkeiten und des molaren Dampfstromes. Aus diesen Gesetzen ergibt sich ein nichtlineares Gleichungssystem als mathematisches Modell der Destillationskolonne.

Es zeigt sich, daß es für die Berechnung bei weitem am günstigsten ist, wenn man die im Gleichungssystem auftretenden Größen in Parameter und Variable so einteilt, wie es der Wirklichkeit entspricht, auch wenn diese Einteilung mit der Fragestellung nicht in Einklang steht. Die Lösung des Gleichungssystems kann dann mit einem sehr einfachen speziellen Iterationsverfahren erfolgen. Dabei ist die Anzahl der Komponenten des Gemisches beliebig.

Mit der Lösung ist zwar gesagt, wie die Kolonne bei bestimmter Konstruktion und Einstellung arbeitet, aber nicht die eigentliche Frage beantwortet, wie man die Kolonne konstruieren und einstellen muß, damit sie in bestimmter Weise arbeitet. Die Beantwortung dieser Frage geschieht durch ein einfaches Verfahren des „gezielten Experimentierens“ mit dem mathematischen Modell.

Das ganze Rechenverfahren ist, gemessen an der gestellten Aufgabe, denkbar einfach. Es erfordert allerdings einen erheblichen Rechenaufwand, der nur von elektronischen Rechenanlagen in vernünftigen Zeiten bewältigt werden kann.

Anschrift: Dipl. Math. O. H. Schmidt, Ludwigshafen am Rhein, Sternstraße 124

Die Eindeutigkeit von Lösungen der eindimensionalen Diffusionsgleichung mit konzentrationsabhängigem Diffusionskoeffizienten und die Lage ihrer Extrema

Von Carl Seyferth

Mit der Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial u}{\partial x} \right) \dots \dots \dots (1)$$

für den Fall, daß der Diffusionskoeffizient D von der Konzentration u abhängt, hat sich zuerst Boltzmann¹⁾ beschäftigt. Er gab eine Lösung unter den Anfangsbedingungen

$$\left. \begin{array}{ll} u = u_0 & \text{für } 0 < x < \infty \\ u = u_1 & \text{für } -\infty < x < 0 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Eindeutigkeitsbeweise sind, soweit festgestellt wurde, hierfür noch nicht erbracht worden.²⁾

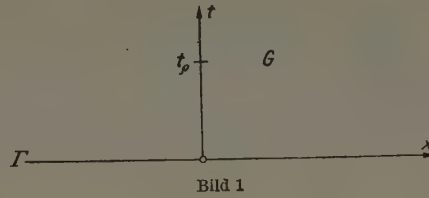
¹⁾ L. Boltzmann, Annalen der Physik (N. F.) 53, 959—964 (1894).

²⁾ J. S. Kirkaldy (Acta Met. 4 (1956), S. 92—93) behauptet, die Boltzmannsche Lösung sei eindeutig, gibt aber keinen Beweis an.

Die Funktion $D(u)$ sei in ihrem ganzen Definitionsbereich, der mindestens das abgeschlossene Intervall

$$u_0 \leq u \leq u_1 \quad \dots \quad (3)$$

umfaßt (ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $u_0 < u_1$ angenommen werden), > 0 und habe eine stetige Ableitung $\frac{dD}{du}$. Die offene obere Hälfte der xt -Ebene, d. h. die Menge der



Punkte (x, t) mit $t > 0$, werde mit G , die x -Achse ohne den Punkt $x = 0$ mit Γ bezeichnet (Bild 1). Lösung der Differentialgleichung (1) unter den Anfangsbedingungen (2) soll jede Funktion $u(x, t)$ genannt werden, die

1. in $G + \Gamma$ stetig ist,
2. in jedem in t -Richtung endlich ausgedehnten Teilbereich von G beschränkt bleibt; d. h. zu jedem $t_0 > 0$ (Bild 1) gibt es Zahlen $u_{e0} \leq u_0$ und $u_{e1} \geq u_1$, so daß für alle Punkte (x, t) mit $0 < t \leq t_0$ die Ungleichungen

$$u_{e0} \leq u(x, t) \leq u_{e1} \quad \dots \quad (4)$$

gelten³⁾;

3. in G alle stetigen partiellen Ableitungen bis zur 2. Ordnung ($u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}$) besitzt,
4. in G die Differentialgleichung (1) erfüllt und
5. auf Γ die Anfangswerte (2) annimmt.

Für solche Lösungen gelten die folgenden drei Sätze:

Satz 1. $u(x, t)$ bleibt in ganz G auf Werte des Intervalls (3) beschränkt.

Satz 2. Wird

$$E(u) = \int_{u_0}^u D(y) dy \quad \dots \quad (5)$$

und $E_1 = E(u_1)$ gesetzt, so erfüllt der Diffusionsstrom $E_x(u(x, t)) = D(u(x, t)) u_x(x, t)$ in ganz G , sofern $x \neq 0$ ist, die Ungleichung

$$|E_x(u(x, t))| \leq \frac{E_1}{|x|} \quad \dots \quad (6).$$

Satz 3. Es gibt höchstens eine Lösung.

Zum Beweis dieser drei Sätze dient folgender

Hilfssatz. Eine Menge von Folgen aus je m Funktionen ($m \geq 1$) der Variablen t

$$h_e^1(t), h_e^2(t), \dots, h_e^m(t)$$

sei in $t_e \leq t \leq t_0$ gegeben und erfülle folgende Voraussetzungen:

1. Alle diese Funktionen seien im ganzen Definitionsbereich zweimal nach t differenzierbar. — Für die Ableitungen wird $\dot{h}_e^\mu(t)$ bzw. $\ddot{h}_e^\mu(t)$ geschrieben.
2. Für die Beträge der zweiten Ableitungen aller dieser Funktionen gebe es eine gemeinsame obere Schranke $\ddot{H} \geq |\ddot{h}_e^\mu(t)|$.
3. Es gebe eine Folge h_0^μ , für deren sämtliche Funktionen $h_0^\mu(t_0) > 0$ ist.
4. Eine Zahl M , die für jede Funktion der Folge h_0^μ die Ungleichung

$$(t_0 - t_e) \cdot M < h_0^\mu(t_0) \quad \dots \quad (7)$$

erfüllt, habe die Eigenschaft: Wenn für ein $t = t_e$ und alle Funktionen einer Folge $h_0^\mu(t_e) > 0$ ist, gibt es eine Folge h_e^μ , so daß für alle $\mu = 1, \dots, m$ die Beziehungen

$$\dot{h}_e^\mu(t_e) \leq M \quad \dots \quad (8)$$

und

$$h_e^\mu(t_e) \geq h_0^\mu(t_e) \quad \dots \quad (9)$$

gelten.

³⁾ Ohne Beschränktheitsbedingung für $u(x, t)$ kann das Anfangswertproblem (1), (2) mehrdeutig sein.

Dann kann man zu jeder Zahl ϑ aus $0 < \vartheta < 1$ eine Folge h_e^μ angeben, für deren sämtliche Funktionen

$$h_e^\mu(t_e) > (1 - \vartheta) [h_0^\mu(t_0) - (t_0 - t_e) M] \quad \dots \quad (10)$$

bleibt. — Dieser Hilfssatz wird in einer zur Veröffentlichung vorgesehenen Arbeit bewiesen, die die Eindeutigkeit von Lösungen der Gleichung (1) unter allgemeineren Randbedingungen behandelt.

Zum Beweis der Sätze 1 bis 3 werden jeweils gegenteilige Annahmen gemacht und unter Anwendung des Hilfssatzes zum Widerspruch geführt. — Um z.B. Satz 3 zu beweisen, wird angenommen, daß zwei verschiedene Lösungen $u(x, t)$ und $v(x, t)$ existieren, und es werde $u(x, t) - v(x, t) = w(x, t)$ gesetzt. Dann gibt es wegen der Stetigkeit von u und v zwei Punkte (a_0, t_0) und (b_0, t_0) mit $a_0 < b_0$ aus G , zwischen denen $w(x, t)$ das Vorzeichen nicht wechselt, und ohne Beschränkung der Allgemeinheit (evtl. vertausche man u und v) kann man

$$h_0(t_0) \equiv \int_{a_0}^{b_0} w(x, t_0) dx > 0 \quad \dots \quad (11)$$

annehmen. $h_0(t_0)$ werde vorerst nur als Abkürzungssymbol aufgefaßt. — Vier Zahlen $a \leq a_0$, $b \geq b_0$, $\varepsilon > 0$ und t_e aus $0 < t_e < t_0$ wähle man nacheinander so, daß folgende Ungleichungen gelten:

$$a \cdot h_0(t_0) \leq -8 t_0 E_1; \quad b \cdot h_0(t_0) \geq 8 t_0 E_1 \quad \dots \quad (12);$$

$$(b - a + 2 u_1 - 2 u_0) \varepsilon < \frac{1}{4} h_0(t_0) \quad \dots \quad (13);$$

$$w(x, t_e) \leq \varepsilon, \quad \text{falls} \quad a \leq x \leq -\varepsilon \quad \text{oder} \quad +\varepsilon \leq x \leq b \quad \dots \quad (14).$$

Im Hilfssatz sei nun $m = 1$ (die Folgen bestehen also nur aus je einer Funktion) und für zwei Stellen a_e, b_e aus $a \leq a_e < b_e \leq b$

$$h_e^1(t) \equiv h_e(t) = \int_{a_e}^{b_e} w(x, t) dx \quad \dots \quad (15).$$

Daß auf diese Funktionen die ersten drei Voraussetzungen des Hilfssatzes zutreffen, ist leicht zu erkennen; insbesondere ergibt sich aus (11) eine geeignete Funktion $h_0(t)$. Durch einige Abschätzungen, bei denen Satz 2 und die Ungleichungen (12) gebraucht werden, kann man zeigen, daß auch die vierte Voraussetzung erfüllt wird, und zwar durch $M = \frac{1}{2 t_0} h_0(t_0)$. Der Hilfssatz

behauptet dann z.B. für $\vartheta = \frac{1}{2}$, daß es eine Funktion $h_e(t)$ gibt, für die

$$h_e(t_e) > \frac{1}{2} \left[h_0(t_0) - (t_0 - t_e) \frac{h_0(t_0)}{2 t_0} \right] > \frac{1}{4} h_0(t_0) \quad \dots \quad (16)$$

gilt. Andererseits folgt mit Hilfe von Satz 1, (14) und (13) für alle $h_e(t)$ der Form (15)

$$h_e(t_e) < 2 \varepsilon (u_1 - u_0) + (b - a) \varepsilon = (b - a + 2 u_1 - 2 u_0) \varepsilon < \frac{1}{4} h_0(t_0)$$

im Widerspruch zu (16). Es kann also keine zwei verschiedenen Lösungen geben.

Die ähnlich verlaufenden Beweise von Satz 1 und 2 seien der Kürze halber nur angedeutet. — Um die Satz 2 entgegenstehende Annahme eines Punktes (x_0, t_0) aus G mit

$$E_x(u(x_0, t_0)) < -\frac{E_1}{|x_0|} \quad \dots \quad (17)$$

zu widerlegen, werden Zahlen a, b und t_e mit ähnlichen Eigenschaften wie in (12) bzw. (14) bestimmt. Im Hilfssatz sei $m = 2$ (es werden also Funktionenpaare betrachtet), $a \leq a_e < b_e \leq b$,

$$h_e^1(t) = E(u(a_e, t)) - L(a_e); \quad h_e^2(t) = -E(u(b_e, t)) + L(b_e) \quad \dots \quad (18),$$

wobei

$$L(x) = E(u(x_0, t_0)) - \frac{x - x_0}{2} \left[\frac{E_1}{|x_0|} - E_x(x_0, t_0) \right]$$

gesetzt ist, und $M = 0$. Unter Anwendung von Satz 1 kann dann ein Widerspruch herbeigeführt werden. — Die mit Satz 1 unverträgliche Annahme eines Punktes (x_0, t_0) aus G mit

$$u(x_0, t_0) > u_1 \quad \dots \quad (19)$$

kann man zum Widerspruch führen, indem man hinreichend kleine positive Zahlen p_e und t_e wählt.

Im Hilfssatz sei $m = 1$,

$$x_0 - \frac{\pi}{2 p_e} \leq a_e < b_e \leq x_0 + \frac{\pi}{2 p_e},$$

$$h_e^1(t) \equiv h_e(t) = \int_{a_e}^{b_e} [u(x, t) - U(x, p_e)] dx \quad \dots \quad (20)$$

und $M = \frac{1}{4 t_0} h_e(t_0)$. In (20) ist

$$U(x, p) = u_{01} - \left[u_{01} - \frac{u(x_0, t_0) + u_1}{2} \right] \cos \{p (x - x_0)\},$$

und u_{01} ist eine gemäß (4) existierende obere Schranke für $u(x, t)$ in $0 < t \leq t_0$.

Mit dem Hilfssatz läßt sich auch eine Erweiterung von Satz 1 auf allgemeinere Randbedingungen für begrenzte und unbegrenzte Diffusionssysteme beweisen, wonach jede Lösung ihren größten und kleinsten Wert, falls solche Werte vorhanden sind, auf der unteren, linken oder rechten Begrenzung ihres Definitionsbereiches in der xt -Ebene annimmt. Bei konstantem D folgt hieraus bekanntlich⁴⁾, indem man das Superpositionsprinzip der Lösungen anwendet, unmittelbar die Eindeutigkeit.

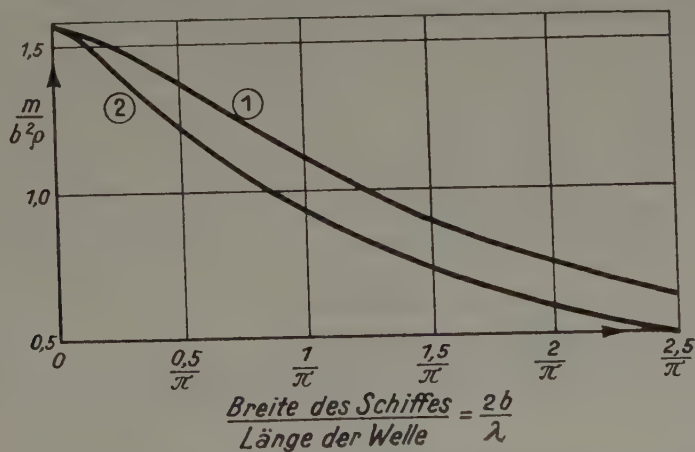
Anschrift: Dr. C. Seyferth, Berlin N 113, Erich-Weinert-Str. 63

⁴⁾ Siehe z. B. I. G. Petrowski, Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen. S. 263—264. Leipzig 1955.

Die hydrodynamische Masse bei Schiffsschwingungen

Von J. A. Sparenberg

Für die Berechnung der hydrodynamischen Masse bei elastischen Schwingungen von Schiffen verwendet man eine zweidimensionale Theorie. Dadurch ist es möglich die Theorie von komplexen Funktionen einzuschalten und mittels konformer Abbildung den besonderen Quer-



schnitt des Schiffes zu berücksichtigen. Wenn Schwingungen höherer Ordnung betrachtet werden, verwendet man die bekannten Ergebnisse des schwingenden Rotationsellipsoids als Korrektur. Es zeigt sich aber, daß dieses Verfahren oft keine richtigen Werte liefert, wenn die Schwingung mehr als vier oder fünf Knoten besitzt. Wir werden die Möglichkeit besprechen, ob diese Fehlleistung der Theorie gegründet sein kann in dem Unterschied zwischen dem Querschnitt des Rotationsellipsoids und demjenigen des Schiffes.

Wir vergleichen das Verhalten der hydrodynamischen Masse pro Einheit der Länge eines unendlichen Streifens und eines Kreiszylinders gleicher Breite $2b$ in einer Schwingung mit derselben Wellenlänge λ . Angenommen wird, daß die auftretenden Frequenzen genügend groß sind, so daß wir die Näherungsbedingung für die freie Wasseroberfläche verwenden können. Sie lautet, daß das Strömungspotential dort verschwindet.

Wir verzichten auf mathematische Einzelheiten und teilen nur die Ergebnisse mit. In der Figur ist auf der vertikalen Achse die dimensionslose hydrodynamische Masse aufgetragen, auf der horizontalen Achse der dimensionslose Quotient von Breite des Schiffes und Länge der Welle. Linie 1 gilt für den Streifen, Linie 2 für den Kreiszylinder. Für $\lambda = \infty$ sind die Werte, wie auch aus der zweidimensionalen Theorie hervorgeht, dieselben. Wenn λ abnimmt, geht die Masse des Zylinders schneller nach Null als diejenige des Streifens. Betrachten wir ein Schiff mit einer Breite von 25 Meter und einer Länge von 200 Meter, das eine elastische Schwingung mit 5 Knoten ausführt, so ist $\frac{2b}{\lambda} \approx \frac{25}{100} = 0.25$. Das Bild zeigt dann, daß in diesem Falle der Unterschied zwischen den beiden hydrodynamischen Massen etwa 17% beträgt. Es zeigt sich also, daß tatsächlich ein Einfluß der Form des Querschnittes möglich ist.

Es ist erwünscht, auch andere Querschnitte (rechtwinklige und dreieckige) zu untersuchen, um auf diese Weise Einsicht zu bekommen in den Einfluß des Querschnittes auf die dreidimensionale Korrektur für hydrodynamische Massen.

Anschrift: Dr. J. A. Sparenberg, Wageningen, Otto van Gelreweg 33 (Niederlande)

Kugelsymmetrische Verdichtungsstöße mit Dissoziation und Ionisation^{*)}

Von I. Teipel

Läuft eine Stoßwelle in einem kugelsymmetrischen Strömungsfeld auf das Zentrum zu, so wachsen die Zustandsgrößen hinter ihrer Front so stark an, daß Dissoziations- und Ionisationsvorgänge auftreten. Es können daher die spezifischen Wärmen und das Molekulargewicht nicht mehr als konstant betrachtet werden. Unter Berücksichtigung dieser Effekte ist der Verlauf eines Verdichtungsstoßes berechnet worden. Dabei wurde hinter der Stoßfront selbst eine quasistationäre Strömung angenommen. Die Ergebnisse, die man dann für ideale Gase konstanter spezifischer Wärme erhält, zeigen sehr gute Übereinstimmung mit exakten Werten, die auf numerischem Wege erhalten worden sind [1], [2]. Ebenfalls in der Nähe des Zentrums, wo eine analytische Lösung von Guderley angegeben worden ist [3], sind die Abweichungen sehr gering.

Die Rechnung wurde bis $T = 10000^\circ\text{K}$ durchgeführt. Als Medium wurde Wasserstoff gewählt.

Zunächst mußte die Stoßpolare berechnet werden. Mit Hilfe der von M. Planck eingeführten Zustandssummen und dem Massenwirkungsgesetz konnten die thermodynamischen Zustandsgrößen ermittelt werden. Die Dichte, die für ein Gas mit $\kappa = \text{const} = 1.40$ höchstens den 6fachen Wert bezogen auf die Dichte vor dem Stoß erreicht, gelangt jetzt zu Verhältnissen in der Größe von etwa 10. Dann nimmt sie ab und nähert sich dem neuen asymptotischen Wert von 4. Beim Vergleich der Temperaturen stellt man fest, daß die Temperatur bei der neuen Kurve nicht so stark anwächst. Nachdem die Umwandlungsvorgänge abgeschlossen sind, kann die Temperatur wieder ansteigen. Weiter kann man aus den Ergebnissen erkennen, daß zunächst das Gas fast vollständig dissoziiert, bevor Ionisation auftritt.

Wie zu erwarten war, erreicht ein Verdichtungsstoß im Gas mit $\kappa = \text{const}$ das Zentrum früher als in dem Fall mit Dissoziation. Es kann eben die gesamte Energie zur Erhöhung des Druckverhältnisses und damit der Stoßgeschwindigkeit verwendet werden.

Literatur

- [1] R. F. Chisnell, J. Fluid Mech. **3** (1957), S. 286.
- [2] R. B. Payne, J. Fluid Mech. **2** (1957), S. 185.
- [3] G. Guderley, Luftfahrtforsch. **19** (1942), S. 302.

Anschrift: Dipl.-Ing. I. Teipel, Aachen, Theaterstr. 13

^{*)} Aus dem Institut für theoretische Gasdynamik der DVL.

Mathematische Fragen der transsonischen Gasdynamik*)

Von Francesco G. Tricomi

1. In den klassischen Zweigen der mathematischen Physik, zum Beispiel Elastizitätstheorie, Wärmetheorie, sogar in der Hydrodynamik, ist die Rolle der Mathematik meistens die der Etappentruppen gewesen: ein schon erobertes Gebiet säubern und sicher machen. Man kann daher die ziemlich skeptischen Worte verstehen, die neulich von Kármán¹⁾ darüber sprach: "I have had the experience that the mathematician may exactly prove existence and uniqueness of solutions in cases in which the answer is evident to the physicist or engineer for physical reasons."

In der transsonischen Gasdynamik — das heißt in der Theorie schallnaher Strömungen — ist aber eine ganz andere Situation entstanden, und die Mathematik ist zur Frontlinie vorgerückt. Man darf sich also nicht wundern, wenn wir in diesem Gebiet von der kristallklaren Vollkommenheit der klassischen mathematischen Physik noch weit entfernt sind und manchmal noch im Dunkeln tappen.

Eine der Hauptschwierigkeiten liegt darin, daß es sich meistens nicht darum handelt, Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung zu beweisen, die gegebene Nebenbedingungen zu befriedigen hat, sondern solche Nebenbedingungen zu schaffen, daß die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung garantiert ist. Und dazu hat bis jetzt die physikalische Intuition wenig geholfen. Übrigens befinden wir uns hier in einem der seltenen Fälle, in welchen es der Techniker gewesen ist, der die Initiative ergriffen hat, den Mathematiker herbeizuholen; was bekanntlich meistens erst dann geschieht, wenn die Technik in der Patsche liegt! Aber der Mathematiker hat auch diesmal versucht, so gut wie möglich zu helfen, nicht zuletzt weil die ungewöhnlichen Schwierigkeiten des Problems eine Herausforderung für ihn darstellen.

In diesem kurzen Bericht werde ich versuchen, eine Idee von einigen, teilweise noch ungelösten, mathematischen Problemen zu geben, welche in der transsonischen Gasdynamik entstanden sind. Ein glücklicher Zufall hat gewollt, daß meine alten, bahnbrechenden Untersuchungen von 1920—23 über partielle Differentialgleichungen von gemischtem Typus sich als wichtig für die moderne Gasdynamik erwiesen haben. Heute aber kann ich leider nicht viel Neues dazu beitragen, auch weil ich mich für längere Zeit mit diesen Fragen nicht mehr beschäftigt habe. Die Gelegenheit, darauf zurückzukommen, wurde mir zuerst in meinem Lehrbuch über partielle Differentialgleichungen²⁾ geboten, welche auch ein Kapitel über Gleichungen von gemischtem Typus enthält. Nun kommt dazu auch meine Mitarbeit an einer Monographie über transsonische Gasdynamik, welche zur Zeit mein Kollege und Freund C. Fenari für den italienischen Consiglio Nazionale delle Ricerche vorbereitet.

2. Im verhältnismäßig einfachen Falle einer reibungs- und wirbelfreien Strömung einer Flüssigkeit ohne Stoßwellen oder andere Unstetigkeiten spricht man gewöhnlich von einer Potentialströmung, weil es dann ein Geschwindigkeitspotential $\varphi(x, y, z, t)$ gibt, dessen partielle Ableitungen nach den Raumkoordinaten mit den Geschwindigkeitskomponenten zusammenfallen. Daher hängt alles von der Bestimmung dieses Potentials φ ab, welches die nicht-lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(\varphi_x^2 - c^2) \varphi_{xx} + (\varphi_y^2 - c^2) \varphi_{yy} + (\varphi_z^2 - c^2) \varphi_{zz} + \varphi_{tt} + 2(\varphi_x \varphi_y \varphi_{xy} + \varphi_y \varphi_z \varphi_{yz} + \varphi_z \varphi_x \varphi_{zx} + \varphi_x \varphi_{xt} + \varphi_y \varphi_{yt} + \varphi_z \varphi_{zt}) = 0 \quad \dots (1)$$

befriedigt. Dabei ist c^2 keine Konstante, sondern das Quadrat der Schallgeschwindigkeit, welche mit der Ableitung $f'(p)$ der rechten Seite der Zustandsgleichung

$$p = f(\varrho)$$

des Gases (p = Druck, ϱ = Dichte) zusammenfällt, was nach sich zieht, daß im besonders wichtigen adiabatischen Falle, wo die Zustandsgleichung lautet

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0} \right)^\kappa \quad \dots (2)$$

*) Anmerkung des Herausgebers: Prof. Tricomi war leider verhindert, den hier abgedruckten Hauptvortrag, zu dem ihn die Tagungsleitung eingeladen hatte, zu halten.

1) Th. von Kármán, Solved and unsolved problems of high speed Aerodynamics. Proc. Conference on High Speed Aerodynamics. (Polyt. Inst. of Brooklyn, 1955) S. 11—40.

2) F. G. Tricomi, Equazioni derivate parziali. (Roma, Cremonese, 1957. Englische Ausgabe in Vorbereitung bei Pergamon Press, London.)

($\kappa = \rho_p/c_v$ ist das Verhältnis bei der spezifischen Wärme des Gases, das für Luft etwa gleich 1,41 ist), man

$$c^2 = \kappa \frac{p}{\rho}$$

hat. Es folgt daraus, daß c^2 eine Funktion der Skalargeschwindigkeit

$$q = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2}$$

allein ist, nämlich

$$c^2 = c_0^2 - \frac{\kappa - 1}{2} q^2 \quad \dots \quad (3),$$

wo c_0 eine Konstante (Schallgeschwindigkeit im Ruhezustand) bedeutet.

Die Gleichung (1) sieht nicht sehr freundlich aus, sogar im speziellen (bis jetzt fast ausschließlich untersuchten) Falle einer zweidimensionalen, stationären Strömung, in welchem φ nur von der Veränderlichen x und y abhängt, und (1) sich zur Gleichung

$$(\varphi_x^2 - c^2) \varphi_{xx} + 2 \varphi_x \varphi_y \varphi_{xy} + (\varphi_y^2 - c^2) \varphi_{yy} = 0 \quad \dots \quad (4)$$

reduziert.

Die Schwierigkeiten sind erstens, daß diese Gleichung nicht-linear ist, und zweitens, daß sie zur Klasse der vor mir nie untersuchten Gleichungen vom gemischten Typus gehört. In der Tat, die Diskriminante

$$D = (\varphi_x \varphi_y)^2 - (\varphi_x^2 - c^2)(\varphi_y^2 - c^2) = c^2(p^2 - c^2) = \frac{\kappa + 1}{2} c^2 \left(q^2 - \frac{2}{\kappa + 1} c_0^2 \right)$$

ihrer Charakteristikengleichung ist positiv, wenn $q > c$, oder (was dasselbe ist) wenn q größer als die kritische Geschwindigkeit:

$$q_{cr} = \sqrt{\frac{2}{\kappa + 1}} c_0$$

ist, und negativ, wenn $q < c$ (oder $q < q_{cr}$) ist. Dementsprechend ist die Gleichung (4) im Überschallgebiet $q > c$ hyperbolisch, im Unterschallgebiet $q < c$ elliptisch und im transsonischen Gebiet $q \sim c$ vom gemischten Typus.

Die erste Schwierigkeit, die Nicht-Linearität kann aber auch ohne zweifelhafte Vereinfachungen a priori, durch den Übergang zur Hodographenebene beseitigt werden. Man wird also die „physikalische Ebene“ (x, y) verlassen, um die Strömung in einer künstlichen Ebene zu studieren, der Hodographenebene, wo die kartesischen Koordinaten (ξ, η) die Geschwindigkeitskomponenten φ_x und φ_y , und die Polarkoordinaten die Skalargeschwindigkeit q und der Winkel Θ des Geschwindigkeitsvektors mit einer festen Richtung sind. Selbstverständlich ist für die Linearisierung ein ziemlich teurer Preis — wie wir später besser sehen werden — zu bezahlen, aber bis jetzt ist dieser Schritt immer als lohnend betrachtet worden.

Der Übergang zur Hodographenebene kann sogar auf zwei verschiedenen Wegen ausgeführt werden: Entweder kann man von der sogenannten *Legendreschen* Transformation Gebrauch machen, d. h. die Funktion

$$\Phi(\xi, \eta) = x \xi + y \eta - \varphi(x, y)$$

als neue Unbekannte betrachten, was zur linearen Gleichung

$$(c^2 - \eta^2) \Phi_{\xi\xi} + 2 \xi \eta \Phi_{\xi\eta} + (c^2 - \xi^2) \Phi_{\eta\eta} = 0, \quad \left[c^2 = c_0^2 - \frac{\kappa - 1}{2} (\xi^2 + \eta^2) \right] \quad \dots \quad (5)$$

führt; oder man kann die sogenannte *Molenbrock-Chapligynsche* Transformation verwenden, welche das Geschwindigkeitspotential durch die Stromfunktion ψ ersetzt, eine Funktion welche durch die Gleichungen

$$\frac{\rho_0}{\rho} \psi_y = \varphi_x = q \cos \Theta, \quad - \frac{\rho_0}{\rho} \psi_x = \varphi_y = q \sin \Theta$$

(ρ_0 = Ruhedichte) mit dem Potential φ verbunden ist.

Mit dieser zweiten üblicheren Methode wird man auf die grundlegende *Chapligynsche* Gleichung

$$K(\sigma) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} = 0 \quad \dots \quad (6)$$

geführt, wo $K(\sigma)$ eine bestimmte Funktion der Variablen σ bezeichnet und die Variable σ einen „Ersatz“ für die Skalargeschwindigkeit q bedeutet, in dem Sinne, daß σ mit q durch die einfache Beziehung

$$\sigma = \int_{q_{cr}}^q \frac{q_0}{q} dq = \int_{q_{cr}}^q \left(1 - \frac{q^2}{q_M^2}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \frac{dq}{q} \quad \dots \dots \dots (7)$$

verknüpft ist, wo

$$q_M = \sqrt{\frac{2}{\kappa-1}} c_0 = \sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} q_{cr}$$

die Höchstgeschwindigkeit der Strömung bedeutet. Was die Funktion $K(\sigma)$ anbetrifft, so läßt sie sich am einfachsten durch q ausdrücken, nämlich:

$$K(\sigma) = \left(1 - \frac{q^2}{q_{cr}^2}\right) \left(1 - \frac{q^2}{q_M^2}\right)^{-\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \quad \dots \dots \dots (8);$$

man kann aber auch schreiben

$$K(\sigma) = a^3 \sigma + O(\sigma^2), \quad \text{mit} \quad a^3 = 2 \left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^{\frac{\kappa+2}{\kappa-1}}.$$

3. Die letzte Formel zeigt, daß man im transsonischen Gebiet — das heißt für kleine Werte von $|\sigma|$ — in der Grundgleichung der Gasdynamik (σ) , $K(\sigma)$ annäherungsweise durch $a^3 \sigma$ ersetzen darf. Noch besser, wenn man $a \sigma = \sigma_1$ setzt, kann man die Grundgleichung auf die besonders einfachen Form

$$\sigma_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \Theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma_1^2} = 0 \quad \dots \dots \dots (9)$$

bringen.

Diese Tatsache ist bedeutungsvoll, weil die Gleichung (9) von mir schon um das Jahr 1920 herum als Schablone der Gleichungen von gemischtem Typus ziemlich gründlich untersucht worden war, so daß sie jetzt überall als *Tricomi*-Gleichung bekannt ist. Ich werde sie hier kürzer als T-Gleichung bezeichnen und in der Gestalt

$$y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad \dots \dots \dots (T)$$

(ohne irgendeine Anspielung auf die ursprünglichen Koordinaten x, y) schreiben.

Das Hauptergebnis meiner damaligen Untersuchungen über diese Gleichung kann in der heute üblich gewordenen Sprechweise sehr kurz ausgesprochen werden: Das *Tricomi*-Problem für die T-Gleichung ist, im allgemeinen, „gut gestellt“; d. h. es hat eine und nur eine Lösung.

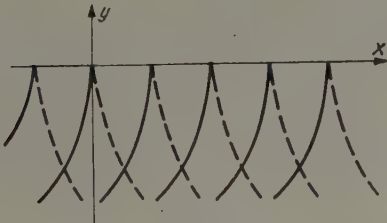


Bild 1

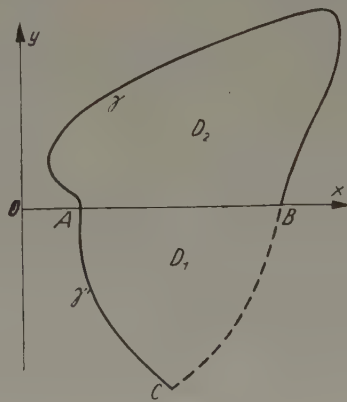


Bild 2

Um das *Tricomi*-Problem zu erklären, ist zuerst zu überlegen, daß das Charakteristikenbild der T-Gleichung die aus dem Bild 1 hervorgehenden Züge aufweist: Die nur unterhalb der x -Achse („hyperbolische Halbebene“) reellen Charakteristiken der Gleichung sind algebraische Kurven dritter Ordnung, welche auf der x -Achse Umkehrpunkte aufweisen, deren Tangenten der y -Achse parallel sind.

Nun seien A und B (Bild 2) die Punkte der x -Achse, in denen die beiden von einem Punkt C der hyperbolischen Halbebene ausgehenden Charakteristiken münden, und es sei γ eine „willkürliche“ Kurve, welche — auf der Seite der „elliptischen Halbebene“ $y > 0$ — beide Punkte A

und B verbinde. Das *Tricomi*-Problem besteht darin, im Gebiet $D = D_1 + D_2$ — wenn D_1 das krummlinige Dreieck ABC und D_2 das Gebiet zwischen x -Achse und γ bezeichnen — eine „reguläre“ Lösung der T-Gleichung zu bestimmen, welche auf der Kurve γ und auf einem der beiden Charakteristikenbogen CA oder CB (z. B. auf $CA \equiv \gamma'$) vorgeschriebene Werte annimmt.

Es versteht sich von selbst, daß ich hier die ziemlich schweren Beweise der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung nicht beibringen kann. Ich kann aber den Leitfaden dieser Beweise erklären, welcher sehr einfach ist und außerdem einige mögliche Verallgemeinerungen des *Tricomi*-schen Problems durchblicken läßt.

Dafür nehmen wir an, daß wir irgendwie zur Kenntnis der Werte der Lösung z auf der Strecke AB der x -Achse — Werte, die wir mit $\tau(x)$ bezeichnen werden — gelangt wären. In solcher Lage — abgesehen von der Schwierigkeit, daß wir bis zur Grenze des Hyperbolizitäts- bzw. des Elliptizitätsgebietes vorzustößen haben — erlaubt uns die Theorie der Gleichungen von hyperbolischem bzw. elliptischem Typus, die Funktion z im Gebiet D_1 bzw. D_2 zu berechnen. Insbesondere können wir damit die Werte der Normalableitung $\partial z / \partial y$ auf der Strecke AB berechnen, welche wir mit $\nu_1(x)$ bzw. $\nu_2(x)$ bezeichnen wollen, je nachdem die Rechnung von der hyperbolischen bzw. von der elliptischen Seite ausgeführt worden ist. Und wir können auch schreiben

$$\nu_1(x) = \mathfrak{I}_1[\tau(x)], \quad \nu_2(x) = \mathfrak{I}_2[\tau(x)],$$

weil beide Funktionen auch von den angenommenen Werten von $\tau(x)$ abhängig sind, d. h. gewisse (lineare) Funktionale von $\tau(x)$ sind.

Die Doppelbezeichnung $\nu_1(x)$ bzw. $\nu_2(x)$ ist nötig, weil — falls die Funktion $\tau(x)$ nicht die „richtige“ ist — es keinen Grund dafür gibt, daß $\nu_1(x) = \nu_2(x)$ ausfällt. Man kann also die „richtige“ Funktion $\tau(x)$ durch Auflösung der Funktionalgleichung

$$\mathfrak{I}_1[\tau(x)] = \mathfrak{I}_2[\tau(x)] \dots \dots \dots (10)$$

zu bestimmen versuchen.

Im wesentlichen ist dies der Weg, auf dem ich zur Formulierung und Auflösung dessen, was heute „*Tricomi*-Problem“ genannt wird, gekommen bin.

Dieser Weg ist keineswegs gut asphaltiert, sondern ziemlich holperig, aber konzeptuell erscheint er mir noch heute der einfachste zum Ziel. Außerdem, wie schon gesagt, die vorigen Überlegungen lassen sofort einige mögliche Verallgemeinerungen des *Tricomischen* Problem durchblicken.

In der Tat, die Theorie der hyperbolischen Gleichungen läßt die Lösung z im Dreieck D_1 nicht nur dann bestimmen, wenn wir ihre Werte auf AB und AC kennen, sondern auch in vielen anderen Fällen. Zum Beispiel, wenn wir — neben $\tau(x)$ — die

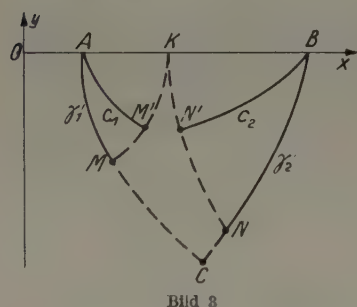


Bild 3

Werte von z auf zwei Charakteristikenbogen, wie den Bogen $\gamma'_1 = AM$ und $\gamma'_2 = BN$ von Bild 3 kennen; d. h. auf zwei Bogen, welche die von irgendeinem Punkte K von AB ausgehenden Charakteristiken KM und KN auf den Charakteristiken AC und BC ausschneiden. Oder man kann die Werte von z sogar auf zwei „willkürlichen“ Kurvenbogen $C_1 = AM'$ und $C_2 = BN'$ (Bild 3) geben, solange gewisse Bedingungen betreffs der Schnittpunkte dieser Bogen mit den Charakteristiken befriedigt sind.

Die letzte Betrachtung führt direkt zum sogenannten Problem von Frankl, das sich als sehr wichtig für die Gasdynamik erwiesen hat.

Es sei noch ausdrücklich bemerkt, daß in allen diesen Randwertaufgaben die die Daten tragenden Kurven in der hyperbolischen Halbebene eine Lücke wie CB oder MN oder $M'N'$ aufweisen. Das ist unentbehrlich. In der Tat, sogar im Falle einer so einfachen hyperbolischen Gleichung wie z. B.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

ist das Problem von Goursat — d. h. das Problem der Bestimmung einer „regulären“ Lösung, deren Werte auf zwei Bogen AB_1 und AB_2 gegeben sind, die nicht Charakteristiken sind — sicher unlösbar, falls die Endpunkte B_1 und B_2 zusammenfallen, so daß beide Bogen einen geschlossenen Cyclus bilden.

4. Mit den letzten Betrachtungen sind wir schon in das Feld der lebendigsten mathematischen Fragen der transsonischen Gasdynamik eingedrungen. In der Tat, eine der wichtigsten noch diskutierten Fragen dieser Disziplin — die Existenz oder Nicht-Existenz einer Potentialströmung längs eines gegebenen Profils — läßt sich auf eine Randwertaufgabe in der Hodographen-

ebene reduzieren, welche mit einem verallgemeinerten *Tricomischen* Problem eng verbunden ist. Es handelt sich nämlich um eine Abart des *Franklschen* Problems (für die *Chaplyginsche* Gleichung), in welchem — auf gewissen Kurven γ, γ' usw. der Hodographenebene — nicht die Werte der gesuchten Lösung, sondern gewisser Linearkombinationen ihrer ersten Ableitungen gegeben sind.

Die Hauptschwierigkeit liegt aber nicht darin, sondern in der Tatsache, daß diese Kurven γ, γ' usw. a priori unbekannt sind! Man kann nämlich die Formel für den Übergang von der physikalischen zur Hodographenebene nur dann hinschreiben, wenn man die entsprechende Randwertaufgabe schon gelöst hat!

Diese mißliche Situation hat zweierlei Konsequenzen zur Folge:

Erstens, nehmen wir für einen Moment an, daß wir im Besitz von einem perfekten Verfahren wären, um die angedeutete Randwertaufgabe zu lösen. Das stimmt leider nicht, aber im Moment macht das nichts. Wären wir in dieser günstigen Lage vielleicht imstande, die Potentialströmung längs eines gegebenen Profils C genau zu bestimmen? Gar nicht, weil wir die datentragenden Kurven γ, γ' usw. in der Hodographenebene nicht kennen. Wir können nur ein Verfahren der successiven Annäherungen einsetzen, indem wir zuerst — durch eine angenäherte Lösung z_0 des Problems — eine erste Approximation γ_0, γ'_0 usw. der datentragenden Kurven bestimmen; dann — mittels dieser Kurven — eine zweite Approximation z_1 der Randwertaufgabe berechnen, usw.

Eine zweite Konsequenz der geschilderten Situation ist der Zwang, die größte Vorsicht bei der Deutung von etwaigen qualitativen Ergebnissen betreffs der Randwertaufgabe in der Hodographenebene zu üben.

Zum Beispiel ist neulich eine Reihe von wichtigen Arbeiten, insbesondere von C. Morawetz erschienen, welche zeigen sollen, daß die angedeutete Randwertaufgabe nur „ausnahmsweise“ eine reguläre Lösung besitzt. Einen sinnvollen Bericht darüber findet man in der soeben erschienenen, schönen Monographie von Lipman Bers über Unterschall- und schallnahe Strömungen³⁾.

Sollte man daraus schließen, daß die sogenannte „transonic controversy“ betreffs der Existenz oder Nicht-Existenz einer stoßwellenfreien transsonischen Strömung längs eines gegebenen Profils im negativen Sinn zu entscheiden ist?

Nach meiner Meinung und der meines kompetenten Kollegen C. Fenari wäre ein solcher Schluß voreilig.

In der Tat, wie könnte man ausschließen, daß eine von der Lösung unserer Randwertaufgabe abhängige Transformation ein allgemeines Profil der physikalischen Ebene in spezielle Kurven γ, γ' usw. der Hodographenebene überführt? Um diesen Gedanken besser zu begreifen, wollen wir ein Beispiel aus der mehr vertrauten Funktionentheorie betrachten:

Selbstverständlich wird eine allgemeine konforme Abbildung ein allgemeines Gebiet D in ein allgemeines Gebiet D' überführen. Handelt es sich aber um die spezielle (von D abhängige) konforme Abbildung, deren Existenz durch den berühmten Satz von Riemann gesichert ist, dann ist das Gebiet D' jedenfalls ein Kreis!

Aus ähnlichen Gründen ist es auch nicht leicht, die physikalische Deutung der Lücke einzusehen, welche — wie wir schon bemerkt haben — die datentragenden Kurven in der hyperbolischen Halbebene immer aufweisen müssen. Einige Beispiele zeigen nämlich, daß diese Lücke sich in der physikalischen Ebene schließen kann.

Alles betrachtet, scheint es mir, daß der Preis für die Liniarisierung der Grundgleichung durch Übergang zur Hodographenebene doch zu hoch ist. Insbesondere scheint es mir zweifelhaft, daß man die „transonic controversy“ wirklich entscheiden kann, solange man sich nicht entschließt, trotz der anhaftenden Schwierigkeiten in der physikalischen Ebene zu bleiben.

5. In Anbetracht der angedeuteten Schwierigkeiten ist es nicht zu verwundern, daß der größte Teil der bis jetzt erreichten theoretischen Ergebnisse in der transsonischen Gasdynamik durch die sogenannte indirekte Methode erreicht worden ist. Diese Methode — die besonders in dem neuen Buch von Guderley⁴⁾ in den Vordergrund gestellt worden ist — besteht darin, gewisse spezielle Lösungen (oder Lösungsklassen) der Grundgleichung zu untersuchen, in der Hoffnung, daß manche der entsprechenden Strömungen von Interesse sein können. Zum Beispiel kann man auf diesem Wege — die T-Gleichung als Grundgleichung betrachtend — eine ziemlich zufriedenstellende Lösung des Problems der transsonischen Ausströmung aus einer Laval-Düse finden.

³⁾ L. Bers, *Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics* (New York, Wiley, 1958). Unter anderem enthält diese Monographie ein sorgfältiges Literaturverzeichnis von fast 400 Nummern. Infolgedessen erübrigt es sich, hier weitgehende Literaturangaben anzufügen.

⁴⁾ K. G. Guderley, *Theorie schallnaher Strömungen*. (Berlin usw., Springer, 1957).

Die indirekte Methode scheint zuerst einfach und elementar. In Wirklichkeit kann auch diese Methode kompliziert und undurchsichtig werden. Der Hauptgrund dazu — abgesehen von dem ausgesprochenen Talent vieler Mathematiker, jedes Ding kompliziert zu machen — ist in der Tatsache zu suchen, daß die wichtigsten speziellen Lösungen der T-Gleichung *Gaußsche* hypergeometrische Funktionen enthalten. Nun ist es eine bekannte Tatsache, daß diese Funktionen ein wahrer Proteus sind. Das hängt mit den berühmten (oder berüchtigten) 48 *Kummer*-schen Partikulärlösungen der entsprechenden Differentialgleichung

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0 \quad \dots \quad (11)$$

zusammen.

Die Wurzel der Schwierigkeit besteht darin, daß wir, solange wir — wie üblich — das klassische Symbol

$$F(a, b; c; x) \quad \dots \quad (12)$$

nur als eine stenographische Abkürzung für die hypergeometrische Reihe

$$1 + \frac{a \cdot b}{c} \frac{x}{1!} + \frac{a(a+1) \cdot b(b+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots$$

betrachten, da diese Reihe den Konvergenzradius eins besitzt, dieses Symbol nur dann benutzen dürfen, solange $|x| < 1$ ist. Kommen dagegen auch Werte von $|x|$ größer als eins in Betracht, dann ist $F(a, b; c; x)$ durch passende lineare Kombinationen von anderen Integralen von (11) zu ersetzen. Zum Beispiel, wenn $a + b - c$ keine ganze Zahl ist, ist $F(a, b; c; x)$ im Kreise $|1-x| < 1$ durch

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)} F(a, b; a+b-c+1; 1-x) \\ & + \frac{\Gamma(c) \Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} (1-x)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-x) \end{aligned}$$

zu ersetzen.

Diese formelle Schwierigkeit können wir aber leicht beseitigen, wenn wir festsetzen, daß das Symbol (12) nicht die hypergeometrische Reihe, sondern die entsprechende analytische Funktion (in der ganzen komplexen Ebene fortsetzbar) bezeichnet. Natürlich ist auch dafür ein Preis zu bezahlen, nämlich die Betrachtung einer Funktion, welche, im allgemeinen, unendlich vieldeutig ist, aber trotzdem bleibt die Sache lohnend. Und der Vorteil wird noch größer, wenn man noch ein ähnliches Symbol, etwa

$$\mathfrak{F}(a, b; c; x)$$

hinzufügt, um die allgemeine Lösung der Gleichung (11) zu bezeichnen. Mit anderen Worten, wenn c keine ganze Zahl ist, setzen wir

$$\mathfrak{F}(a, b; c; x) = A F(a, b; c; x) + B x^{1-c} F(a-c+1, b-c+1; 2-c; x),$$

wo A und B zwei willkürliche Konstanten bedeuten.

Mit solchen und ähnlichen Kunstgriffen ist es mir gelungen — wenn ich mich nicht irre —, in der angedeuteten Monographie in Mitarbeit mit Prof. Ferrari etwas Klarheit in der Wildnis der Partikulärlösungen der T-Gleichung zu schaffen.

Zum Beispiel, die wichtigen Lösungen von Darboux (von Guderley „G-Lösungen“ genannt) sind alle in folgenden vier Formeln eingeschlossen:

$$\begin{aligned} z_1 &= \varrho^p \mathfrak{F}(-p, p+1/3, 2/3; (\varrho-x)/2\varrho), & z_2 &= \bar{\varrho}^{(p+1/3)} \mathfrak{F}(-p, p+1/3, 2/3; (\varrho-x)/2\varrho), \\ z_3 &= y \varrho^p \mathfrak{F}(-p, p+5/3, 4/3; (\varrho-x)/2\varrho), & z_4 &= y \bar{\varrho}^{(p+5/3)} \mathfrak{F}(-p, p+5/3, 4/3; (\varrho-x)/2\varrho), \end{aligned}$$

wo p eine willkürliche Zahl bedeutet und

$$\varrho^2 = (x-x_0)^2 + \frac{4}{9} y^2.$$

Es gibt aber auch weitere wichtige hypergeometrische Partikulärlösungen der T-Gleichung (z. B. die sogenannten *Falkowitschen* Lösungen

$$z = y^{1/4} (\mathfrak{C}\varrho \lambda)^{h-1/6} (\mathfrak{S}\sin \lambda)^{1/6} \mathfrak{F}\left(\frac{1}{12} - \frac{h}{2}, \frac{7}{12} - \frac{h}{2}; 1-h; \mathfrak{C}\varrho \lambda^{-2}\right) \frac{\sin}{\cos}(h\mu),$$

wo h eine willkürliche Zahl bedeutet, und λ und μ die neuen Veränderlichen sind, die mit den alten x und y durch die Gleichung

$$\lambda + i\mu = \log \left[\frac{2}{3} (y^{3/2} + y_0^{3/2}) + ix \right] - \log \left[\frac{3}{2} (y^{3/2} - y_0^{3/2}) + ix \right]$$

wo y_0 eine willkürliche positive Konstante ist) verbunden sind. Diese Lösungen sind eine Konsequenz der ziemlich überraschenden Tatsache, daß die T-Gleichung beim obigen Variablenwechsel durch die sehr einfache Gleichung

$$\sin^2 \lambda \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{5}{36} u = 0 \quad \dots \quad (13)$$

ersetzt wird.

Wie Germain und Liger zeigten, kann diese letzte Tatsache auch dafür verwendet werden, eine gewisse Gleichung des Typus (6), mit einer vorteilhaften Funktion $K(\sigma)$, streng in die T-Gleichung überzuführen.

6. Abgesehen von den soeben angedeuteten Untersuchungen von Germain-Liger, ist die indirekte Methode bis jetzt nur auf die T-Gleichung und auf eine andere einzige Grundgleichung angewendet worden: die Gleichung von Tomotika-Tamada:

$$(1 - y^2) z_{xx} + y^2 z_{yy} + y z_y = 0 \quad \dots \quad (14),$$

welche als eine bessere Annäherung der Chapligyschen Gleichung (6) im Vergleich mit der T-Gleichung betrachtet werden kann. Diese Gleichung ist elliptisch innerhalb des Streifens $|y| < 1$ und hyperbolisch außerhalb desselben.

Unter anderem hat Herr Nocilla — ein Schüler von meinem Kollegen Ferrari — diese Gleichung für die Untersuchungen von Delta-Flügeln usw. vorteilhaft angewendet⁵⁾. Nocilla hat die sehr einfachen Partikulärlösungen von (14) die für ihn nötig waren, auf einem mühsamen Umweg durch Reihenentwicklungen nach Zylinderfunktionen erreicht. Neulich aber ist es mir gelungen⁶⁾, die Sache wesentlich zu vereinfachen, insofern ich beweisen konnte, daß durch den Variablenwechsel

$$x = \arctan(\eta/\xi) - \eta + \text{const}, \quad y = \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

Gleichung (14) in die andere

$$(1 - \xi) z_{\xi\xi} - 2\eta z_{\xi\eta} + (1 + \xi) z_{\eta\eta} - 2z_\xi = 0 \quad \dots \quad (15)$$

überführt werden kann.

Diese neue Gleichung ist elliptisch innerhalb des Einheitskreises $\xi^2 + \eta^2 > 1$, hyperbolisch außerhalb desselben, und ihre technisch wichtigsten Partikulärlösungen lassen sich alle unmittelbar ermitteln. Insbesondere sieht man sofort ein, daß (15) die Partikulärlösungen

$$z = a(\xi^2 + 4\xi + 3\eta^2) + b\eta + \frac{c}{1 - \xi} + d$$

besitzt, wo a, b, c, d vier willkürliche Konstanten bedeuten; eine Formel, welche fast alle die Partikulärlösungen der Tomotika-Tamada-Gleichung umfaßt, die sich bis heute von gasdynamischem Interesse erwiesen haben.

Anschrift: Prof. Dr. F. G. Tricomi, Corso Tassoni 34, Turin, Italien

⁵⁾ S. Nocilla, Die transsonischen Strömungen um Flügelprofile. WGL-Jahrbuch 1955. Für weitere Arbeiten desselben Vf. siehe insbesondere: Accademia Science Torino, v. 89 (1954—55) ff.

⁶⁾ F. G. Tricomi, Sull'equazione di Tomotika e Tamada. Rend. Lincei (8) 25, 135—139 (1958).

Verallgemeinerte ähnliche Lösungen bei dreidimensionalen Grenzschichten*)

Von W. Wuest

Bei großen *Reynoldsschen* Zahlen werden die Strömungsvorgänge in der Nähe fester Wände durch die *Prandtl'schen* Grenzschichtgleichungen beschrieben, solange die Strömung in der Grenzschicht laminar verläuft. Die Lösung dieser Gleichungen ist bisher vorwiegend auf ebene oder rotationssymmetrische Probleme beschränkt geblieben. Aber auch die „strenge“ Lösung des ebenen Problems bereitet in der allgemeinen Form erhebliche Schwierigkeiten. In gewissen Fällen gelingt es nun, die ebenen, also von zwei unabhängigen Veränderlichen bestimmten Probleme auf

*) Eine ausführliche Darstellung des Vorgetragenen ist in dem Bericht 58/A/47 der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen enthalten.

solche zurückzuführen, die nur noch von einer Veränderlichen abhängen. Die partielle Differentialgleichung der Grenzschicht kann dann auf eine gewöhnliche zurückgeführt werden. Die Geschwindigkeitsverteilung $u(x, y)$ unterscheidet sich an zwei verschiedenen Stellen x nur durch einen von x abhängigen Maßstabsfaktor in u und y , und man spricht daher von „ähnlichen“ oder „affinen“ Lösungen.

Bei Grenzschichten in räumlichen Strömungen hängen die Lösungen im allgemeinen von drei Raumkoordinaten ab. Es gibt aber auch hier Fälle, bei denen die Differentialgleichungen so umgeformt werden können, daß sie nur noch von zwei oder gar nur von einer Veränderlichen abhängen. Die Abhängigkeit der Grenzschichtprofile von nur einer Veränderlichen bedeutet, daß die Geschwindigkeitsprofile auf der ganzen Oberfläche des Körpers zueinander affin sind. Wir bezeichnen eine solche Ähnlichkeit im folgenden als „flächenhafte“ Ähnlichkeit. Die Bedingungen, unter denen flächenhaft ähnliche Lösungen bei dreidimensionalen Grenzschichten auftreten, sind schon mehrfach untersucht worden [1], [2], [3].

Durch die Forderung, daß die Geschwindigkeitsprofile auf der ganzen Körperoberfläche zueinander affin sein sollen, wird die Zahl der möglichen Lösungen stark eingeschränkt. Es ist naheliegend, die Ähnlichkeitsbedingungen so zu verallgemeinern, daß man sich die Körperoberfläche mit einem Netz von Linien überdeckt denkt, wobei die Geschwindigkeitsprofile längs einer Linie affin, dagegen von Linie zu Linie verschieden sind. Es sollen jetzt also folgende Bedingungen gelten:

$$\frac{u(\alpha, \beta, z)}{U^*(\alpha, \beta)} = \sigma_\zeta(\chi, \zeta); \quad \frac{v(\alpha, \beta, z)}{V^*(\alpha, \beta)} = \tau_\zeta(\chi, \zeta),$$

wobei $\zeta = \sqrt{Re} g(\alpha, \beta) \cdot z$ ist und längs der Linien $\chi = \chi(\alpha, \beta) = \text{const}$ die Geschwindigkeitsprofile ähnlich sein sollen.

Durch Einführen dieser Beziehungen in die Grenzschichtgleichungen erhält man das System:

$$\begin{aligned} \sigma_{\zeta\zeta\zeta} + \sigma_{\zeta\zeta}(a_1\sigma + b_1\tau) + a_2(1 - \sigma_\zeta^2) + a_3(1 - \tau_\zeta^2) + a_4(1 - \sigma_\zeta\tau_\zeta) \\ + \sigma_{\zeta\zeta}(a_5\sigma_\chi + b_5\tau_\chi) + a_5(1 - \sigma_\zeta\sigma_{\zeta\chi}) + b_5(1 - \tau_\zeta\tau_{\zeta\chi}) = 0, \\ \tau_{\zeta\zeta\zeta} + \tau_{\zeta\zeta}(a_1\sigma + b_1\tau) + b_2(1 - \tau_\zeta^2) + b_3(1 - \sigma_\zeta^2) + b_4(1 - \sigma_\zeta\tau_\zeta) \\ + \tau_{\zeta\zeta}(a_5\sigma_\chi + b_5\tau_\chi) + a_5(1 - \sigma_\zeta\tau_{\zeta\chi}) + b_5(1 - \tau_\zeta\sigma_{\zeta\chi}) = 0, \end{aligned}$$

wobei die von χ abhängigen Koeffizienten $a_1 \dots a_5; b_1 \dots b_5$ gegeben sind durch:

$$\begin{aligned} a_1(\chi) &= \frac{1}{g} \frac{\partial}{h_1 \partial \alpha} \left(\frac{U^*}{g} \right) + \frac{U^*}{g^2} \left(\frac{1}{R_{\gamma\alpha}} + \frac{1}{R_{\beta\alpha}} \right), & b_1(\chi) &= \frac{1}{g} \frac{\partial}{h_2 \partial \beta} \left(\frac{V^*}{g} \right) + \frac{V^*}{g^2} \left(\frac{1}{R_{\gamma\beta}} + \frac{1}{R_{\alpha\beta}} \right), \\ a_2(\chi) &= \frac{1}{g^2} \frac{\partial U^*}{h_1 \partial \alpha}, & b_2(\chi) &= \frac{1}{g^2} \frac{\partial V^*}{h_2 \partial \beta}, \\ a_3(\chi) &= - \frac{V^{*2}}{U^* g^2 R_{\gamma\alpha}}, & b_3(\chi) &= - \frac{U^{*2}}{V^* g^2 R_{\gamma\beta}}, \\ a_4(\chi) &= \frac{V^*}{g^2} \left(\frac{1}{U^*} \frac{\partial U^*}{h_2 \partial \beta} + \frac{1}{R_{\gamma\beta}} \right), & b_4(\chi) &= \frac{U^*}{g^2} \left(\frac{1}{V^*} \frac{\partial V^*}{h_1 \partial \alpha} + \frac{1}{R_{\gamma\alpha}} \right), \\ a_5(\chi) &= \frac{U \chi_\alpha}{h_1 g^2}, & b_5(\chi) &= \frac{V \chi_\beta}{h_2 g^2}. \end{aligned}$$

In diesen Formeln sind α und β krummlinige orthogonale Koordinaten auf der Körperoberfläche mit den ortsveränderlichen Maßstabsfaktoren h_1 und h_2 . Für die dritte Koordinate normal zur Wand wird näherungsweise innerhalb der Grenzschicht $h_3 d\gamma = dz$ gesetzt. $R_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = \alpha, \beta, \gamma$) ist der Krümmungsradius der Schnittkurven der Flächen $\mu = \text{const}$ und $\nu = \text{const}$ gemessen in der Tangentialebene zu $\mu = \text{const}$. Für rechtwinklige Koordinaten sind alle $R_{\mu\nu} = \infty$.

Es ist naheliegend, im Fall rechtwinkliger Koordinaten die Ansätze

$$U, V, g^2, \chi \text{ prop. } e^{p_i \gamma} e^{q_i \nu} x^{n_i} z^{r_i} \quad (i = 1 \dots 4)$$

zu wählen. Während im Fall flächenhafter Ähnlichkeit nur ein Parameterpaar (z. B. p_1, q_1) frei wählbar ist, können im allgemeineren Fall der linienhaft ähnlichen Lösungen zwei Parameterpaare frei gewählt werden. Weitere Lösungsgruppen erhält man im übrigen dadurch, daß man für die Proportionalitätsfaktoren von U, V, g^2 statt der Konstanten A, B, C wie bei den flächenhaft ähnlichen Lösungen jetzt willkürliche Funktionen von χ einsetzt, wobei aber die Linien $\chi = \text{const}$ selbst in bestimmter Weise vorgegeben sind. Durch den Übergang zur linienhaften Ähnlichkeit ist also eine erheblich größere Lösungsmannigfaltigkeit erzielt, allerdings auch der Rechenaufwand vergrößert worden.

Auch im Falle von Zylinder- und Kugelkoordinaten ist eine ganz entsprechende Verallgemeinerung möglich. Von besonderer Bedeutung ist es, daß jetzt auch Fälle behandelt werden können, bei denen die Geschwindigkeitskomponenten in periodischer Weise vom Winkel abhängen.

Ein besonders interessanter Sonderfall ist der schräg angeströmte Kegel, der von F. K. Moore [4], [5], [6] auch für kompressible Strömungen behandelt worden ist, wobei die Linien $\chi = \text{const}$ mit den Erzeugenden des Kegels zusammenfallen. Wie W. D. Hayes [7] und F. K. Moore [8] gezeigt haben, können diese Ähnlichkeitsgesetze auch auf allgemeinere konische Flächen, also beispielsweise auf elliptische Kegel übertragen werden.

Literatur

- [1] Th. Geis, „Ähnliche“ dreidimensionale Grenzschichten. Inaugural-Diss. Freiburg i. Br. 1955, J. Rat. Mech. Analysis Vol. 5, Nr. 4 (1956) S. 643.
- [2] A. G. Hansen and H. Z. Herzig, On possible similarity solutions for three-dimensional incompressible laminar boundary layers. I. Similarity with respect to stationary rectangular coordinates. NACA TN 3768 (1956). II. Similarity with respect to stationary polar coordinates. NACA TN 3832 (1956).
- [3] W. Wuest, Ähnliche Lösungen bei Grenzschichten in räumlichen Strömungen. Bericht Max-Planck-Institut für Strömungsforschung 55/B/13 (1955).
- [4] F. K. Moore, Laminar boundary layer on a circular cone in supersonic flow at a small angle of attack. NACA TN 2521 (1951).
- [5] F. K. Moore, Laminar boundary layer on cone in supersonic flow at large angle of attack. NACA TN 2844 (1952).
- [6] F. K. Moore, Three-dimensional laminar boundary-layer flow. J. aero. Sci. 20 (1953) S. 525—534.
- [7] W. D. Hayes, The three-dimensional boundary layer. U. S. nav. Ord. Test Sta. Inyokern techn. Mem. RRB—105 (1950).
- [8] F. K. Moore, Three-dimensional compressible laminar boundary-layer flow. NACA TN 2279 (1951).

Anschrift: Dr. W. Wuest, Aerodynamische Versuchsanstalt, Göttingen, Bunsenstr. 10

Über die Bewegungsrichtung in thermokonvektiven Zellularströmungen

Von Jürgen Zierep*)

Erwärmt man eine über der Horizontalebene (x, y) befindliche zähe Flüssigkeitsschicht gleichmäßig von unten, so tritt in dem Medium eine stationäre Zellularkonvektion ein, wenn der Temperaturabfall von der Grund- zur Deckfläche ($z = 0, z = h$) einen kritischen Wert überschreitet. Durch einen Strömungsanzeiger kann die Bewegung sichtbar gemacht werden. Die mathematische Beschreibung dieser Strömung kann mit der Theorie von Rayleigh erfolgen. Dabei wird die Zellularströmung als eine Störung des bewegungslosen reinen Wärmeleitungsvorganges angesehen. Man gelangt deshalb zu einem linearen homogenen Differentialgleichungssystem mit linearen homogenen Randbedingungen. Es entsteht ein Eigenwertproblem bei dem grundsätzlich keine Aussage über die Bewegungsrichtung in den Zellen gemacht werden kann.

Auf Grund von Experimenten weiß man, daß die Bewegungsrichtung auf der Zellachse ($u = v = 0, w$) an das Vorzeichen von $\frac{\partial \mu}{\partial \vartheta}$ ($\mu = \text{Zähigkeit}, \vartheta = \text{Temperatur}$) geknüpft ist und zwar gilt für $\frac{\partial \mu}{\partial \vartheta} < 0$ (d. h. $\frac{\partial \mu}{\partial z} > 0$) $w > 0$, was i. a. dem Fall einer Flüssigkeit entspricht, während bei $\frac{\partial \mu}{\partial \vartheta} > 0$ (d. h. $\frac{\partial \mu}{\partial z} < 0$) $w < 0$ ist, was i. a. einem Gase entspricht.

Dieser experimentelle Tatbestand wird von der Theorie bestätigt, wenn man in den Differentialgleichungen sowohl die nichtlinearen Terme als auch $\frac{\partial \mu}{\partial z} \neq 0$ berücksichtigt. Man untersucht hierzu die folgende Frage: Unter welchen Bedingungen ist die Rayleighsche Lösung der linearen Gleichungen noch als Näherung des allgemeineren Gleichungssystems anzusehen? Eine notwendige Bedingung hierfür ist, daß die gegenüber dem Rayleighschen Fall auftretenden Zusatzglieder z. B. auf der Zellachse gleichmäßig in z von genügend kleinem Betrage sind. Bei der dritten Navier-Stokes-Gleichung führt dies — wenn man den Rayleighschen Ausdruck für w benutzt — auf die vom Experiment bekannte Forderung, daß $\text{sgn}(\varrho w) = \text{sgn} \frac{\partial \mu}{\partial z}$ sein muß. (Ausführliche Veröffentlichung demnächst in den Beiträgen zur Physik der Atmosphäre.)

Anschrift: Priv.-Doz. Dr. J. Zierep, Aachen, Karl-Marx-Allee 100

*) Institut für theoretische Gasdynamik der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt e. V.

BUCHBESPRECHUNGEN

Creep and Fracture of Metals at High Temperatures. Proceedings of a Symposium held at the National Physical Laboratory 31st May—2nd June 1954. IV + 420 S. m. zahlreichen Abb. London 1956. Her Majesty's Stationery Office.

Es ist üblich, daß hochqualifizierte Kolloquien zum zwischenzeitlichen Erkenntnisstand zu Spezialgebieten der reinen und angewandten Metallkunde durchgeführt werden. Vom National Physical Laboratory in England wurde Mitte 1954 ein vorwiegend der metallphysikalischen Betrachtungsweise gewidmetes Kolloquium zum Kriechen und zur Bruchbildung von Metallen und Metall-Legierungen bei höheren Temperaturen unter Anteilnahme in- und ausländischer Referenten durchgeführt. In vier verschiedenen Sektionen wurde berichtet über: Deformationsvorgänge in einfachen Materialien, d. h. im wesentlichen reine Metalle, unlegiert; Kriechwiderstand legierter Metalle unter besonderer Berücksichtigung heterogenen Gefügeaufbaues; Theorie der Bruchbildungen; Arbeiten über die 3. Periode der Kriechkurve und die dabei auftretenden Bruchbildungen.

Technischer Ausgangspunkt war seinerzeit, und ist auch noch zum Teil heute, die Forderung nach hochdauerstandfesten Stählen für den Gasturbinenbau.

Die vorliegenden Abhandlungen, die mit einem Einführungsbeitrag von N. P. Allen beginnen, behandeln vor allen Dingen unter strenger Beachtung der metallphysikalischen Plastizitätslehre, und im besonderen der Theorie der Versetzungsbildung, Wanderung und Auflösung, die Kriechgesetze und damit die Grundlagen zu der legierungstechnischen Entwicklungsbasis für hochtemperaturfeste metallische Werkstoffe. Trotz der oft stark ins Theoretische gehenden Betrachtungen, wird der metallographische Realbefund zum Teil unter Heranziehung elektronenoptischer Aufnahmen besonders für die Seite der Bruchbildungen verfolgt, was sehr begrüßt werden muß.

Das Buch vermittelt ferner zahlreiche reale Werte zu den Aktivierungsenergien und fixiert insgesamt den zur damaligen Zeit, d. h. 1954 vorhandenen Erkenntnisstand unter strenger Wahrung auch früherer Grundlagenarbeiten, z. B. der Schule von H. Hanemann, wie sie an Blei und Blei-Legierungen, sowie Zink und Zink-Legierungen ermittelt wurden.

Für die Legierungstechnik der Gasturbinenwerkstoffe, ebenso wie für dauerstandfeste NE-Metall-Legierungen vermittelt die Zusammenstellung der Einzelreferate einen sehr guten Überblick und ermöglicht die sinnvolle Anwendung der bisher als gültig erkannten Grundsätze. Obwohl in einigen Beiträgen bereits die Frage der Löslichkeit näher behandelt wird und auch in theoretischen Betrachtungen, z. B. von Cottrell mit herangezogen wird, bleiben gerade für die Frage der thermisch bedingten Vorgeschichte und ihren Einfluß auf das spätere Kriechen für homogene und heterogene Legierungen noch zahlreiche Forschungsprobleme offen.

Verhältnismäßig wenig findet man über Substrukturen, obwohl diese in der Nachfolgezeit und auch schon vorher sehr stark das Bild der Plastizitätsvorgänge berühren. Auch wird in der Folgezeit besonders das Studium der spontanen Anfangsdehnung noch stärker in den Vordergrund treten. Die Zusammenstellung zeigt das große Übergewicht, das auf einer Reihe von Teilgebieten der Metallphysik gerade die englische Schule errungen hat. Dies darf mit Anerkennung und dem Wunsch festgestellt werden, daß in manchen Teilgebieten der Metallphysik auch in Deutschland die während des Krieges stark zwangsweise unterbrochene metallphysikalische Arbeitsrichtung den internationalen Anschluß wiedererlangt.

Freiberg/Sa.

F. Erdmann-Jesnitzer

Prof. Dr. E. H. Riesenfeld, Anorganisch-chemisches Praktikum. Qualitative Analyse und anorganische Präparate. 17. Aufl., neu bearb. v. Prof. Dr. H. Remy. XIX + 462 S. m. 35 Abb. Zürich 1956. Rascher Verlag. Preis geb. 24,80 SFr.

Generationen von Chemikern und anderen Naturwissenschaftlern sind an Hand des „Praktikums“ von E. Riesenfeld in die experimentelle und analytische anorganische Chemie eingeführt worden. Nunmehr liegt das bewährte Werk — nachdem sich der Autor wegen seines hohen Alters von einer weiteren Bearbeitung selbst zurückgezogen hat — von seinem Schüler H. Remy neu bearbeitet vor.

Am Grundcharakter des Buches hat H. Remy nichts geändert. Nach einer Beschreibung der wichtigsten chemischen Operationen wie Wägen und Destillieren folgt ein Kapitel mit vorzugsweise theoretischen Bemerkungen zu den Fundamentalgesetzen und -theorien der Chemie, in das aber auch schon einige, vor allem messende Versuche (z. B. eine einfachste Äquivalentgewichtsbestimmung) eingefügt sind. Der Hauptteil gehört der Beschreibung der wichtigsten Elemente (incl. „seltener“) und anorganischen Verbindungen in der durch den klassisch-analytischen Trennungsgang gegebenen Ordnung, vorangestellt die wichtigsten Nichtmetalle und Säuren, eingestreut eine Vielzahl lehrreicher Präparate. Mit einer Beschreibung des vollständigen Analysengangs und einer Anzahl Tabellen über Löslichkeiten, Dichten von Lösungen, Mol- und Äquivalentgewichten findet das Buch seinen Abschluß.

In vielen Fällen spürt man die Hand H. Remy, der mit gutem Erfolg versucht hat, das „Praktikum“ den Erfordernissen und Erkenntnissen der heutigen Zeit anzupassen. Das gilt insbesondere für die theoretischen Kapitel zum Atombau, zur chemischen Bindung, elektrolytischen Ionen- und Dissoziationslehre und Nomenklatur, weiter aber auch für die moderne Darstellung und Formulierung von Redoxreaktionen und die elektrochemische Theorie der Spannungsreihe — hier werden sogar schon thermodynamische Probleme berührt und der Begriff der Affinität exakt definiert. Die Brönstedtsche Säure- und Basentheorie hätte allerdings eine etwas stärkere Beachtung verdient als durch eine einfache Fußnote. Auch über die Einführung der Begriffe „Dysprotide“ und „Emprotide“ anstelle der „Säuren“ und „Basen“ Brönstedts sollte man diskutieren. Niemand kommt heute z. B. auf die Idee zurück, Oxydation und Reduktion ausschließlich in ursprünglicher Bedeutung zu gebrauchen.

Wenig glücklich erscheint dem Rezensenten auch der Gebrauch des Terminus technicus „Oxydoreduktion“ für das was bisher Riesenfeld und andere als „Disproportionierung“ bezeichnen. Die Tatsache, daß Disproportionierungen auch außerhalb von Redoxreaktionen zu finden sind, könnte durch die Einführung des präziseren Begriffs „Redoxdisproportionierung“ (siehe z. B. bei F. Seel) voll Rechnung getragen werden.

Besonders wohlthuend ist die Umarbeitung der Kapitel „Schwefelammoniumgruppe“ und „Schwefelwasserstoffgruppe“. Anstelle der üblichen Unterordnung nach Elementen mit jeweiliger Beschreibung der Einzelreaktionen tritt die Unterordnung nach Reagenzien mit jeweiliger Gegenüberstellung des Verhaltens der betreffenden Elemente. Gemeinsames und Unterschiedliches der Elemente einer Gruppe kommen dadurch viel klarer zum Ausdruck und prägen sich dem Lernenden tiefer ein als nach der älteren Methode. Dank auch dem Neubearbeiter für die Aufnahme einiger analytisch wichtiger Spezialreaktionen, womit er eine Riesenfeldsche Tradition fortführt. Die Reihe der Präparate wurde gleichfalls durch H. Remy bereichert.

Daneben gibt es allerdings noch einiges, was man nur unter Vorbehalt akzeptieren kann. Am fraglichsten ist die von Riesenfeld übernommene Version der Definition einer „gekoppelten Reaktion“ (S. 55: KClO_3 -Zersetzung in Gegenwart von MnO_2 , S. 124: Volhard-Reaktion). Diese Definition hat mit der von W. Ostwald geschaffenen nichts mehr gemeinsam (W. Ostwald, Grundlinien der anorg. Chem. 4. Aufl. 1919, S. 243/4). — Die Strukturformel des Nickel-dimethylglyoxim-Komplexes kann noch nicht voll befriedigen. Und Fe^{+++} -Ionen sehen nicht gelb aus (bläuviolett). — Diese Dinge können jedoch den Wert des „Praktikums“ kaum schmälern. Chemiker und andere Interessenten werden das im Text sehr übersichtlich geschriebene, in bezug auf Papier und Einband vorzüglich ausgestattete Buch immer wieder gern zur Hand nehmen und zu Rate ziehen. Insbesondere aber sei es den interessierenden Kreisen unserer heranwachsenden akademischen Jugend aufs beste empfohlen.

Dresden

E. Baumgärtel

B. W. Gnedenko, Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. (Mathematische Lehrbücher und Monographien, herausgegeben von der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Forschungsinstitut für Mathematik, I. Abteilung. Mathematische Lehrbücher, Band IX.) XI + 387 S. m. 20 Abb. Berlin 1957. Akademie-Verlag. Preis geb. 29,50 DM.

Das vorliegende Buch ist die von W. Richter und H. J. Roßberg besorgte deutsche Übersetzung der 2. Auflage eines 1954 in russischer Sprache erschienenen Lehrbuches aus der Hand eines der namhaftesten Stochastiker der Gegenwart. Ziel des Buches ist es, Mathematikstudenten vom zweiten Studienjahr ab in die Anfangsgründe der Wahrscheinlichkeitsrechnung einzuweißen und zur Erarbeitung einer spezifisch „wahrscheinlichkeitstheoretischen Intuition“ zu führen. Zu dem Zweck entwickelt Vf. die notwendigen Grundbegriffe, auf Kolmogorows Axiomensystem fußend (die ersten 4 Paragraphen sind einem unveröffentlichten Manuskript Kolmogorows entnommen), mathematisch streng, jedoch ohne rigorosen Einbau in die abstrakte Maßtheorie. Obwohl dem in der Maßtheorie genügend vorgebildeten Leser die Möglichkeit, Begriffe und Sätze der Stochastik maßtheoretisch zu deuten, durchaus gegeben wird, wahrt somit die Darstellung doch die Eigenart des Gebietes und eine gewisse, für Anfänger wünschenswerte Anschaulichkeit. Behandelt werden in 6 Kapiteln: Wahrscheinlichkeitsbegriff, Bernoulli- und Poisson-Schema, Markow-Ketten, Zufallsgrößen und Verteilungsfunktionen, mathematische Erwartung, Dispersion und Momente, schwaches und starkes Gesetz der großen Zahlen. Die Theorie der charakteristischen Funktionen (Kap. 7) leitet über zur Theorie von Summen zufälliger Größen, den klassischen Grenzwertsätzen (Kap. 8) und der Theorie der unbeschränkt teilbaren Verteilungsgesetze (Kap. 9). Es folgt ein Ausschnitt aus der Theorie der stochastischen Prozesse (Kap. 10) und ein kurzer Abriß der „Elemente der Statistik“ (Kap. 11), in welchem vor allem Kolmogorow- und Smirnow-Test, Bayes-Schluß und Confidenzgrenzen erörtert werden. Den Abschluß bildet ein historischer Abriß, der zunächst die Entwicklung der klassischen Stochastik bis ca. 1850, von da ab die überragenden Leistungen und die Bedeutung der russischen und sowjetischen Schule schildert. Dadurch wie auch durch die entsprechende Stoffauswahl (besonders Kap. 8–11) bietet das Buch wertvolle Ergänzungen zu dem durch die üblichen Lehrbücher westlicher Prägung vermittelten Wissensgut. Ausführlich behandelte Beispiele und zahlreiche Übungsaufgaben, zumeist Physik, Technik, Ballistik und Fabrikationskontrolle entnommen, illustrieren und klären die theoretischen Überlegungen.

Der Zweck des Buches ist aufs glücklichste erfüllt; es überbrückt genau die in der deutschsprachigen Literatur zwischen elementaren Einführungen in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und anspruchsvollen Traktaten der Wahrscheinlichkeitstheorie bisher klaffende Lücke und ist daher jedem ernsthaften Interessenten für dieses Gebiet vorbehaltlos zu empfehlen. Abgesehen von unvermeidlichen, leicht erkennbaren Druckfehlern, fallen folgende entstehenden Unstimmigkeiten auf: Seite 218: konstante Faktoren in (3) und der folgenden Formel; Seite 276–278: Summationsgrenzen und Gültigkeitsbereiche der Formeln für $F(t, x; \tau, y)$ in Beispiel 1 und $p(t, x)$ und $F(t, x; \tau, y)$ in Beispiel 2.

Bad Nauheim

M. P. Geppert

Dr. L. Heffter (Prof. a. d. Universität Freiburg i. Br.) Grundlagen und analytischer Aufbau der Projektiven, Euklidischen, Nicht-euklidischen Geometrie. 3. wesentl. überarbeitete Aufl. 191 S. m. 66 Abb. Stuttgart 1958. B. G. Teubner Verlagsges. Preis geb. 16,80 DM.

Für jeden, der nach den Grundlagen und dem axiomatischen Aufbau der projektiven Geometrie fragt, ist das Buch von Heffter ein unentbehrliches Standardwerk. Es dürfte sich daher erübrigen, hier noch etwas über den Inhalt, den Aufbau und die Vorzüge der älteren Auflagen dieses Buches zu sagen (1. Auflage Karlsruhe 1929, 2. Auflage Leipzig 1950).

Beim Vergleich mit der 2. Auflage fällt vor allem auf, wie den jetzt 95jährigen Verfasser noch immer das Bestreben nicht losläßt, den Anordnungsaxiomen eine logisch, systematisch und anschaulich in gleicher Weise befriedigende Fassung zu geben. In der zweiten Auflage ging es um das Axiom von Pasch: „Trifft eine Gerade eine Seite eines Dreiecks im Inneren, so trifft sie noch eine zweite Seite im Inneren oder sie geht durch eine Ecke“. Dieses Axiom fällt bei den älteren Darstellungen etwas aus dem Rahmen; freilich ist es von solcher Kraft, daß man daneben nur noch einige wenige Axiome braucht, die kaum mehr tun, als die Worte definieren. Verf. hat nun schon in der 2. Auflage eine ausgewogenere Folge von Axiomen an die Spitze gestellt, aus denen dann die Aussage von Pasch folgt, nämlich: 1. Ein Elementenpaar AB eines Grundgebildes erster Stufe teilt, unabhängig von der Reihenfolge der beiden Elemente, alle übrigen Elemente des Gebildes in zwei Klassen von je unendlich vielen Elementen, so daß jedes Element außer AB einer und nur einer Klasse angehört. 2. Unter 4 Elementen eines Grundgebildes 1. Stufe gibt es zu jedem Element ein und nur ein anderes, das von ihm durch die beiden anderen getrennt wird. 3. Durch Projektieren und Schneiden gehen sich trennende (umschließende) Elementenpaare stets wieder in sich trennende (umschließende) über.

Schon im Artikel 24 und im Nachtrag der 2. Auflage äußert sich Verf. über diese Fassung der Axiome unbefriedigt und deutet an, daß er sie auf reine Inzidenzaussagen zurückzuführen für möglich halte. Diese Andeutung führt er nun in der 3. Auflage durch. Er stellt das vollständige Vierseit an die Spitze, definiert dadurch die harmonische Lage und definiert: Zwei Elementenpaare AB und CD eines Grundgebildes erster Stufe umschließen oder trennen einander, je nachdem ob es zu beiden ein harmonisches Paar gibt oder nicht. Dann gibt er die folgende Reihe von Axiomen: 1. Im vollständigen Vierseit sind die drei Diagonale nicht kollinear. 2. Zu zwei harmonischen Paaren eines Grundgebildes 1. Stufe gibt es kein gemeinsames harmonisches Paar. 3. Stimmt mit dem obigen Axiom Nr. 2 überein. 4. Wenn zwei Elementenpaare CD und DE durch ein Paar AB umschlossen werden, so wird auch das Paar CE durch AB umschlossen.

Damit ist in der Tat die Anordnung durch Inzidenzaussagen definiert und die Axiome der Anordnung ordnen sich in die der Inzidenz ein. Freilich will es dem Referenten scheinen, daß auf diese Weise der Bereich des anschaulich oder logisch Evidenten verlassen ist und das letzte Wort noch nicht gesprochen ist. Die Frage nach einem Paar, das zu zwei gegebenen Paaren harmonisch liegt, ist doch gar nicht elementar, und die Sätze darüber sind in keiner Weise evident. Freilich ist es logisch einwandfrei, den Begriff des Umschließens und Trennens mit Hilfe dieser Eigenschaft zu definieren; nur würden sich bei dieser Definition bei Zugrundelegung etwa des rationalen Zahlkörpers fast alle Punktpaare trennen, z. B. die Paare $0,1$ und $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$. Diese Möglichkeit wird allerdings nachträglich durch das Axiom 3 wieder ausgeschlossen.

Vollends aber das Axiom 2 erscheint bedenklich. Dem unbefangenen Leser erscheint seine Aussage als Satz, für den er nach einem Beweise fragt. Ist ein solcher nicht möglich, so erwartet der Leser zum mindesten den Beweis der Widerspruchslosigkeit eines so komplizierten Axioms von den übrigen.

Darin, daß der Verf. uns so in seine Werkstatt hineinsehen läßt und die Schwierigkeiten nicht verschleiert, die sich vor einer allseitig befriedigenden Fassung der Ordnungsaxiome auftürmen, erweist sich die Lebendigkeit dieses Buches. Wie sich der Verf. mit einer vorletzten Lösung nie zufrieden gibt, so regt er auch uns andere zu immer gründlicherem Nachdenken an, ja zwingt uns geradezu dazu.

Halle/Saale

O.-H. Keller

R. P. Boas jr. und R. C. Buck, Polynomial Expansions of Analytic Functions. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Heft 19). VIII + 77 S. m. 16 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1958. Springer-Verlag. Preis geh. 19,80 DM.

Die Verfasser behandeln in dem vorliegenden Heft die Entwicklungseigenschaften (im Komplexen) von Polynomengenen, die durch erzeugende Relationen allgemeiner Art definiert werden. Damit vereinigen sie zwei Zweige der Analysis, die nahezu unabhängig voneinander entstanden sind. Auf der einen Seite hat man die Resultate hinsichtlich der Eigenschaften von Polynomengenen, die einfache erzeugende Relationen besitzen; auf der anderen Seite steht ein Fundamentalproblem der klassischen Analysis, die Darstellbarkeit einer analytischen Funktion $f(z)$ als Reihe $\sum c_n p_n(z)$, wobei $\{p_n\}$ eine vorgeschriebene Funktionsfolge ist. Zum ersten Problemkreis wird das von A. Erdélyi herausgegebene dreibändige Werk „Higher transcendental functions“ (1953/55) angeführt und zum zweiten das Ergebnis-Heft 3 von L. Bieberbach „Analytische Fortsetzung“ (1955), das sich allerdings auf den meistbehandelten Spezialfall $p_n(z) = z^n$ beschränkt. Es wird bemerkt, daß in diesem Zusammenhang nur selten die Fülle der anderen Polynomfolgen $\{p_n\}$ in Betracht gezogen wird. Diese Lücke wollen die Verfasser mit ihrer Monographie schließen, ohne zu sehr zu verallgemeinern. Dabei verfolgen sie das Ziel, ein gewisses Maß an Ordnung und Vollständigkeit zu erreichen und die Resultate und Methoden in einer Fassung darzulegen, durch die sie allgemein zugänglich werden können. Das erscheint im Hinblick auf ihre große Bedeutung für praktische Anwendungen wichtig; jedoch findet man keinen Hinweis auf solche Anwendungsmöglichkeiten. Die Verfasser betonen, daß sie wenig prinzipiell Neues darlegen, aber die Theorie in mancher Hinsicht verallgemeinern, einige Einzelheiten, die noch nicht bekannt sein werden, ausarbeiten und neue Gesichtspunkte aufzeigen. Teilweise stützen sie sich auf frühere Publikationen, und teilweise bringen sie auch noch nicht veröffentlichtes Material. In Kapitel I: Einführung findet man allgemeine Bemerkungen über Polynom-Entwicklungen, Darstellungen

mit einem Kern, die Methode der Kern-Entwicklung, Lidstonesche Reihen, Laguerresche und Appellsche Polynome. Kapitel II widmet sich der Darstellung ganzer Funktionen und Kapitel III der Darstellung von Funktionen, die im Ursprung regulär sind. Kapitel IV bietet als Anwendungen Hinweise auf Eindeutigkeitsätze und Funktionalgleichungen. Danach folgt ein reichhaltiges Literaturverzeichnis.

Dresden/Berlin

R. Reißig

G. Bürgermeister (o. Prof. a. d. TH Dresden) unter Mitwirkung von Dipl.-Ing. H. Steup, Stabilitätstheorie mit Erläuterungen zu DIN 4114, Teil I. XII + 407 S. m. 306 Abb. Berlin 1957. Akademie-Verlag. Preis geb. 35,50 DM.

Die Fortschritte des Leichtbaues haben in den letzten Jahrzehnten gezeigt, daß die Berechnungsverfahren für dünnwandige Tragwerkkonstruktionen weiter entwickelt und ausgebaut werden müssen. Die einschlägigen, meist hochtheoretischen Arbeiten namhafter Forscher fanden nur langsam Eingang in die praktische Statik. Erst in den letzten Jahren hatte man sich zu einer erweiterten Normvorschrift für statische Stabilitätsberechnungen entschlossen (DIN-Norm 4114), welche zu einem wesentlichen Teil auf die Initiative von Prof. Dr. Chwalla zurückgeht. Durch diese Vorschrift wurden die Stahlbauingenieure veranlaßt, sich eingehender als bisher mit genaueren Rechenmethoden zu beschäftigen. Deshalb ist es zu begrüßen, wenn durch einen Fachmann der Öffentlichkeit Unterlagen zur Verfügung gestellt werden, durch welche eine Brücke von der reinen Theorie her bis zur praktischen Anwendung geschlagen wird. Das vorliegende Buch entspricht dieser Forderung weitgehend. In den Abschnitten des ersten Teiles werden die Theorien der elastischen und plastischen Stabilität der Stäbe dargelegt, wobei auch die Theorie der Eigenwerte, energetische Methoden und Näherungsverfahren weitgehend Berücksichtigung finden. Ein besonderer Abschnitt ist dem schwierigen, aber praktisch sehr wichtigen Fall der Biegedrillknickung und Kippung gewidmet. Im 2. Teil des Buches werden Berechnungsbeispiele gebracht, welche die Anwendung der im 1. Teil dargelegten Theorien im Anschluß an die Normvorschriften vor Augen führen. Durch insgesamt 19 Beispiele wird eine geschickte Auswahl der in der Stahlbaupraxis besonders wichtigen Belastungsfälle gebracht, so daß gerade der praktische Ingenieur, der für die Beschäftigung mit der reinen Theorie meist nur noch wenig Zeit zur Verfügung hat, hier wertvolle Hinweise erhält. Im Anhang findet sich ein Beitrag zur Erleichterung des Verständnisses der Variationsrechnung. Ein Sachverzeichnis, sowie die am Ende der einzelnen theoretischen Abschnitte befindlichen umfangreichen Schriftumsverzeichnisse, die nach Ansicht des Referenten als nahezu vollständig anzusehen sind, ergänzen das Werk, welches in Kreisen der Stahlbau- und Leichtbauingenieure sicher große Beachtung finden wird.

München

H. Neuber

Prof. Dr. G. Hoheisel, Aufgabensammlung zu den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen. 3. durchgesehene u. verb. Aufl. (Slg. Götschen, Bd. 1059.) 124 S. m. Abb. Berlin 1958. Walter de Gruyter & Co. Preis geh. 2,40 DM.

Die vorliegende Aufgabensammlung kann als eine wertvolle Ergänzung zu den beiden Bänden aus der Sammlung Götschen über gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen vom gleichen Verfasser angesehen werden.

Für eine große Anzahl von Aufgabentypen, überwiegend aus dem Gebiet der gewöhnlichen Differentialgleichungen, werden Lösungsverfahren vorgeführt; insbesondere befinden sich darunter solche,

die man in den üblichen Lehrbüchern nicht antrifft. An Hand von ausführlich durchgerechneten Beispielen werden diese Lösungsverfahren näher erläutert.

Daneben enthält der Band Ergänzungen zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, vor allem über singuläre Lösungen, Berührungstransformationen, Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen, singuläre Punkte, über die Operatorenmethode bei linearen Differentialgleichungen und über die Integration durch Reihen. Diese Zusätze sind verständlicherweise knapp dargestellt, und vielfach ist die gleichzeitige Benutzung der oben erwähnten Bände zu empfehlen.

Der eigentliche Übungsteil umfaßt sowohl Aufgaben formaler Art als auch Aufgaben zur Theorie. Auch hierzu sind neben den Lösungen zum Teil längere Anleitungen gegeben.

Gegenüber der 2. Auflage ist die jetzige im wesentlichen unverändert.

Dresden

J. Schmidt

Dr. K. Strubecker (o. Prof. d. Mathematik a. d. TH Karlsruhe), Differentialgeometrie.

Teil II: Theorie der Flächenmetrik. (Slg. Göschen, Band 1179/1179a). 195 S. m. 14 Abb. Berlin 1958. Walter de Gruyter & Co. Preis brosch. 4,80 DM.

Teil III: Theorie der Flächenkrümmung. (Slg. Göschen, Bd. 1180/1180a). 254 S. m. 38 Abb. Berlin 1958. Walter de Gruyter & Co. Preis brosch. 4,80 DM.

Strubecker gibt auf dem knappen Raum von zwei Göschenbändchen eine Darstellung der gesamten klassischen Flächentheorie im euklidischen komplexen R^3 .

Der Stoff ist so gegliedert, daß der zweite Band die innere Flächentheorie bringt: A. Flächenmetrik, B. Vektoranalysis auf Flächen, C. Abbildungen vom Flächen (mit Kartenprojektionen), D. Geodätische Krümmung, geodätische Linien, absoluter Parallelismus. Im dritten Band wird die Theorie der Flächenkrümmung behandelt: A. Streifentheorie, B. elementare Theorie der Flächenkrümmung (2. Fundamentalform, Krümmungslinie usw.), C. Gaußsche Theorie (mit ausführlicher Darstellung der nichteuklidischen Geometrie), D. Ableitungsgleichungen und Fundamentalsätze, E. Minimalflächen. Überall wird ausführlich auf die Besonderheiten eingegangen, die im Komplexen auftreten können.

Verf. arbeitet mit Vektoren und den quadratischen Fundamentalformen. Andere Hilfsmittel (Ricci-Kalkül, Cartansche alternierende Produkte, äußere Differentiale, Pfaffsche Formen) die für allgemeinere Räume geschaffen sind, konnten hier außer Betracht bleiben. Im Großen ist damit Stoff und Methode vorgegeben; sie sind ja schon vielfach von großen Meistern dargestellt. Um so erstaunlicher ist es, daß es dem Verf. gelingt, im einzelnen noch neue, elegantere und überzeugendere Beweise, klärende Bemerkungen, schöne und lehrreiche Sonderfälle und Beispiele zu geben, die man sonst nicht findet.

So geleitet das Buch den Leser in Geduld und Liebenswürdigkeit von den Grundtatsachen, die gründlich erklärt und bewiesen werden, zu tiefliegenden und schöneren neueren Sätzen, wie die Unverbiegbarkeit der Eiflächen oder zu den hinreichenden Bedingungen für die Verbiegbarkeit zweier Flächen ineinander. Auch schwierige Beweise sind so auf das Wesentliche angelegt und so geschickt gegliedert, daß sie nicht ermüden. Überall finden sich aufhellende Aus- und Durchblicke. So wird jeder, der sich über Differentialgeometrie unterrichten will, der Student des IV. Semesters wie der ältere Mathematiker, mit Gewinn zu diesem Bändchen greifen und dort eine Fülle von Wissen und von wirklicher Einsicht finden.

Halle/Saale

O.-H. Keller

Prof. Dr. E. Schmidt, Einführung in die Technische Thermodynamik und in die Grundlagen der chemischen Thermodynamik. Siebente, verb. Aufl. XVI + 528 S. m. 244 Abb. sowie 3 Dampftafeln. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1958. Springer-Verlag. Preis geb. 30,— DM.

Das in rascher Folge nach den Vorigen in siebenter Auflage erschienene Werk hat außer einigen textlichen Verbesserungen bezüglich Umfang und Stoffeinteilung keine Änderungen erfahren. Neu ist aber der konsequente Übergang vom technischen, auf das Kilogramm-Kraft orientierte Maßsystem zu dem internationalen MKSA-System mit dem Kilogramm Masse als Definition der Stoffeinheit. Der Verfasser legt dementsprechend das Newton bzw. das Joule als Einheiten der Kraft bzw. der Energie seinen Ableitungen zugrunde, rechnet aber die Beispiele vernünftigerweise mit dem 9,80665-fachen des Newton, d. h. mit dem Kilopond bzw. mit der Kilokalorie anstelle des Joule, so daß alle Zahlenwerte die gleichen bleiben wie im technischen Maßsystem und sich lediglich die Bezeichnung der Kräfteinheit geändert hat.

Der Verfasser weist mit Nachdruck auf die von ihm durchgeführte Verwendung von Größengleichungen anstelle von Zahlenwertgleichungen hin. Ob das in allen Fällen von Vorteil ist, möchte ich dahingestellt sein lassen. Schreibt man beispielsweise die Wärme Gleichung mit den Symbolen für die Energien $Q = U + L$, so ist das weder etwas Besonderes noch Neues. Wenn aber für die äußere Arbeit L das Produkt $p \cdot v$ eingeführt wird, dessen Glieder laut Bezeichnungstabelle mit ganz bestimmten Maßeinheiten verbunden sind, dann ist das Fehlen eines Umrechnungsfaktors, wenigstens für den Studierenden, erschwerend, zumal die Dimensionskontrolle Fehler im Ansatz vermeiden hilft.

Im übrigen bedarf das Buch als Standardwerk der Technischen Thermodynamik und als Lehrbuch für Hoch- und Fachschulen keiner besonderen Empfehlung mehr.

Dresden

H. Faltin

H. Wussing, Über Einbettungen endlicher Gruppen. (Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Math. Naturw. Klasse. Band 103, Heft 3.) 38 S. Berlin 1958. Akademie-Verlag. Preis brosch. 2,50 DM.

Der vorliegende Bericht des Verfassers gibt eine vollständige Lösung des Einbettungsproblems (gegeben eine Gruppe G , gesucht alle Obergruppen H mit $H \supseteq \bar{G} \cong G$) mittels elementarer Methoden. Der Verfasser verwendet als Obergruppen die symmetrischen Gruppen; die Beweise beruhen auf der Betrachtung der Erzeugendensysteme.

Wird die Obergruppe H von t Elementen mit den Ordnungen n_1, \dots, n_t erzeugt, so spricht man von einer „Einbettung vom Typ $[n_1, \dots, n_t]$ “.

Das wichtigste Ergebnis lautet: Jede endliche Gruppe gestattet eine Einbettung vom Typ $[m, n]$ mit $m \cdot n \equiv 0(2)$ und Ausnahme des Falles $m = n = 2$. Für $m \cdot n \not\equiv 0(2)$ oder $m = n = 2$ ist die Einbettung für die Klasse der endlichen Gruppen unmöglich. Da die symmetrischen Gruppen bereits durch 2 Elemente erzeugt werden, kann man bei $t > 2$ Erzeugenden über die Ordnungen n_3, \dots, n_t frei verfügen.

Als Anwendungen auf die symmetrischen Gruppen erhält man den Satz, daß diese durch 2 Elemente, deren Ordnungen ≤ 60 sind, erzeugt werden.

Abschließend werden zwei Sätze über sog. „zugehörige Einbettungen“ bewiesen; dies sind Einbettungen, für die die Ordnung von G und der Grad von H übereinstimmen.

Dresden

M. Hasse

EINGEGANGENE BÜCHER

Bei der Schriftleitung sind folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten).

J. Kuntzmann, Méthodes Numériques. Interpolation — Dérivées. XVII + 253 S. m. 60 Abb. Paris 1959. Dunod Editeur. Preis geb. 3.600 F.

W. S. Wlassow, Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik. Wissenschaftl. Redaktion: Prof. Dr.-Ing. A. Kromm, Techn. Hochschule Dresden/Graz. XI + 661 S. m. 193 Abb. Berlin 1958. Akademie-Verlag. Preis geb. 75,— DM.

E. P. Popow, Dynamik automatischer Regelsysteme. In deutscher Sprache herausgegeben von Prof. Dr. H. Bilharz † und Dr. P. Sagirow, Institut f. angew. Mathematik a. d. Universität Würzburg. XI + 780 S. u. zahlr. Abb. Berlin 1958. Akademie-Verlag. Preis geb. 80,— DM.

L. Cesari, Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Heft 16). VII + 271 S. m. 37 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1959. Springer-Verlag. Preis geh. 68,— DM.

Jet Propulsion Engines (High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion, Editor: O. E. Lancaster, Vol. XII). XVII + 799 S. m. Abb. Princeton, New Jersey 1959. Princeton University Press. Preis geb. 20,— \$.

Dr. M. Müller, Variationsrechnung (Mathematisch-Naturwissensch. Bibl., Bd. 24). 133 S. m. 23 Abb. Leipzig 1959. B. G. Teubner Verlagsges. Preis geb. 8,10 DM.

Dr.-Ing. I. Szabó (o. Prof. der Mechanik a. d. Techn. Universität Berlin), Einführung in die Technische Mechanik. Vierte verb. u. erw. Aufl. XII + 434 S. m. 525 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1959. Springer-Verlag. Preis geb. 22,50 DM.

Dr. K. Hirschfeld, Baustatik. Theorie und Beispiele. XVI + 823 S. m. 1263 Abb. (1849 Einzeldarstellungen) im Text und in 217 Zahlenbeispielen sowie 38 Zahlentafeln m. 560 Fig. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1959. Springer-Verlag. Preis geb. 76,50 DM.

T. Iwinski, Theory of Beams. The Application of the Laplace Transformation Method to Engineering Problems. 85 S. London 1958. Pergamon Press. Preis geb. 21 s net.

Prof. Dr. F. Neiß †, Determinanten und Matrizen. 5. Aufl. VII + 111 S. m. 1 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1959. Springer-Verlag. Preis geh. 6,60 DM.

W. Lietzmann, Experimentelle Geometrie. 111 S. m. 132 Abb. Stuttgart 1959. B. G. Teubner Verlagsges. Preis geb. 12,60 DM.

W. v. Koppenfels und **F. Stallmann**, Praxis der konformen Abbildung. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 100.) XV + 375 S. m. 251 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1959. Springer-Verlag. Preis geb. 69,— DM.

Dr. H. Rund, The Differential Geometry of Finsler Spaces. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 101.) XV + 284 S. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1959. Springer-Verlag. Preis geb. 59,60 DM.

Dr. L. Föppl und **Dr. E. Mönch**, Praktische Spannungsoptik. Zweite, Neubearb. Aufl. XI + 209 S. m. 163 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1959. Springer-Verlag. Preis geb. 30,— DM.

Proceedings of the third congress on theoretical and applied mechanics. December, 24—27, 1957. Bangalore, India. Published by the Indian Society of Theoretical and Applied Mechanics, Indian Institute of Technology, Kharagpur. 362 S.

J. R. Wait, Electromagnetic Radiation from Cylindrical Structures. IX + 200 S. m. Abb. London 1959. Pergamon Press. Preis geb. 50 s net.

Dr. E. Eckert, Einführung in den Wärme- und Stoffaustausch. Zweite, überarbeitete Aufl. XI + 295 S. m. 171 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1959. Springer-Verlag. Preis geb. 28,80 DM.

Prof. Dr. K. Knopp, Aufgabensammlung zur Funktionentheorie. Teil II: Aufgaben zur höheren Funktionentheorie. (Slg. Götschen, Bd. 878.) Fünfte Aufl. 151 S. Berlin 1959. Walter de Gruyter & Co. Preis brosch. 2,40 DM.

Dr. K. Iserland, Untersuchungen über die Umlenkung eines freien Luftstrahls mit Hilfe von Drall. (Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik an der ETH in Zürich, herausgeg. von Prof. Dr. J. Ackeret, Nr. 25.) 99 S. m. 48 Abb. Zürich 1958. Verlag Leemann. Preis brosch. 21,— SFr.

Dr. L. Meyer, Singularitätentheorie der Flügeltitter. (Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik an der ETH in Zürich. Herausgeg. v. Prof. Dr. J. Ackeret, Nr. 26.) 127 S. m. 64 Abb. sowie 10 Rechen- und 4 Zahlentabellen. Zürich 1959. Verlag Leemann. Preis brosch. 28,— SFr.

Dr. W. Krull, Elementare und klassische Algebra. II. Band. (Slg. Götschen, Bd. 933.) 132 S. Berlin 1959. Walter de Gruyter & Co. Preis brosch. 2,40 DM.

C. E. Pearson, Theoretical Elasticity. (Harvard Monographs in Applied Science, Number 6). 218 S. m. Abb. Cambridge 1959. Harvard University Press. Preis geb. \$ 6.—.

Dr. P. Lorenz, Anschauungsunterricht in Mathematischer Statistik. Band II: Der Schluß vom Teil aufs Ganze. Erster Teil. XI + 213 S. m. 27 Abb. Leipzig 1959. S. Hirzel Verlag. Preis geb. 18,60 DM.

H. Parkus, Stationäre Wärmespannungen. V + 166 S. m. 34 Abb. Wien 1959. Springer-Verlag. Preis geb. 38,— DM.

A. W. Pogorelow, Die eindeutige Bestimmung allgemeiner konvexer Flächen. (Schriftenreihe des Forschungsinstituts für Mathematik bei der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Heft 3). 78 S. Berlin 1956. Akademie-Verlag. Preis brosch. 18,50 DM.

F. Bachmann, Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Band XCVI.) XIII + 311 S. m. 160 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1959. Springer-Verlag. Preis geb. 49,80 DM.

C. Weber und W. Günther, Torsionstheorie. 306 S. m. 160 Abb. Braunschweig und Berlin 1958. Verlag Fr. Vieweg und Akademie-Verlag. Preis geb. 38,— DM.

Fachbegriffe der Programmierungstechnik: Wörterverzeichnis für die Programmierung von Digital-Rechenanlagen mit Stichworten in fünf Sprachen, ausgearbeitet vom Fachausschuß Programmieren der GAMM, herausgeg. v. J. Heinhold, München. München 1959. R. Oldenbourg Verlag. Preis brosch. 4,40 DM.

E. A. Maxwell, General Homogeneous Coordinates in Space of Three Dimensions. XIV + 169 S. Cambridge 1959. University Press. Preis brosch. 13/6 net.

E. A. Chistova, Tables of Bessel Functions of the true argument and of integrals derived from them. 523 S. London 1959. Pergamon Press. Preis geb. £ 5 net.

W. Hahn, Theorie und Anwendungen der direkten Methode von Ljapunow (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Heft 22). VIII + 142 S. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1959. Springer-Verlag. Preis geb. 28,— DM.

E. D. Cashwell und C. J. Everett, A practical manual on the Monte Carlo Method for random walk problems. IX + 153 S. m. 64 Abb. London 1959. Pergamon Press. Preis geb. 40 s net.

W. D. Kupradse, Randwertaufgaben der Schwingungstheorie und Integralgleichungen (Hochschulbücher für Mathematik, Band 21). VIII + 239 S. m. 11 Abb. Berlin 1956. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Preis geb. 27,60 DM.

Loo-Keng Hua, Additive Primzahltheorie. VI + 174 S. Leipzig 1959. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Preis geb. 20,50 DM.

A. D. Myschkis, Lineare Differentialgleichungen mit nacheilendem Argument (Hochschulbücher für Mathematik, Band 17). X + 181 S. m. 9 Abb. Berlin 1955. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Preis geb. 21,30 DM.

W. A. Bizadse, Zum Problem der Gleichungen vom gemischten Typus (Mathematische Forschungsberichte, Band V). 59 S. m. 5 Abb. Berlin 1957. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Preis brosch. 13,20 DM.

I. N. Vekua, Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Typus und Randwertaufgaben (Mathematische Forschungsberichte, Bd. II). 107 S. Berlin 1956. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Preis brosch. 10,40 DM.

H. Sprenger, Experimentelle Untersuchungen an geraden und gekrümmten Diffusoren (Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik an der

Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich). 84 S. m. 37 Abb. Zürich 1959. Verlag Leemann. Preis brosch. 17.—SFr.

I. I. Priwalow, Einführung in die Funktionentheorie. Teil II (Mathematisch-Naturwiss. Bibliothek, Band 22). V + 194 S. m. 28 Abb. Leipzig 1959. B. G. Teubner-Verlagsgesellschaft. Preis geb. 8,— DM.

W. D. Hayes and R. F. Probst, Hypersonic Flow Theory (Applied Mathematics and Mechanics). XIV + 464 S. m. 96 Abb. New York and London 1959. Academic Press. Preis geb. 11.50 \$.

K. R. Biermann, Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet. Dokumente für sein Leben und Wirken (Zum 100. Todestag) (Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin). 86 S. m. 4 Abb. Berlin 1959. Akademie-Verlag. Preis brosch. 10,50 DM.

R. M. Exner and M. F. Rosskopf, Logic in Elementary Mathematics. XI + 274 S. m. 25 Abb. New York/Toronto/London 1959. McGraw-Hill Book Company. Preis geb. 52 s. 6d.

L. W. Kantorowitsch und W. I. Krylow, Näherungsmethoden der Höheren Analysis (Hochschulbücher für Mathematik, Bd. 19). XI + 611 S. Berlin 1956. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Preis geb. 47,— DM.

A. N. Tychonoff und A. A. Samarski, Differentialgleichungen der Mathematischen Physik (Hochschulbücher für Mathematik, Bd. 39). 660 S. m. 97 Abb. Berlin 1959. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Preis geb. 42,— DM.

W. Richter, Flugmechanik (Mathematik-Naturwissenschaftliche Bibliothek, Bd. 25) VI + 296 S. m. 167 Abb. Leipzig 1959. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Preis geb. 15,60 DM.

F. R. Gantmacher, Matrizenrechnung, Teil I. Allgemeine Theorie (Hochschulbücher für Mathematik, Bd. 36) XI + 324 S. m. 5 Abb. Berlin 1958. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Preis geb. 26,80 DM.

F. R. Gantmacher, Matrizenrechnung, Teil II. Spezielle Fragen und Anwendungen (Hochschulbücher für Mathematik, Bd. 37). VII + 244 S. m. 4 Abb. Berlin 1959. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Preis geb. 26,— DM.

M. Fisz, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik (Hochschulbücher für Mathematik, Bd. 40). X + 528 S. m. 37 Abb. Berlin 1958. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Preis geb. 36,— DM.

P. K. Raschewski, Riemannsche Geometrie und Tensoranalysis (Hochschulbücher für Mathematik, Bd. 42). 606 S. m. 32 Abb. Berlin 1959. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Preis geb. 42,— DM.

P. K. Raschewski, Elementare Einführung in die Tensorrechnung. 79 S. m. 6 Abb. Berlin 1959. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Preis brosch. 6,— DM.

J. Mikusinski, Operatorenrechnung (Mathematik für Naturwissenschaft und Technik, Bd. 1). XII + 360 S. m. 177 Abb. Berlin 1957. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Preis geb. 37,20 DM.

NACHRICHTEN

Fifth Congress on Theoretical and Applied Mechanics

University of Roorkee, Roorkee (India)

The Fifth Congress on Theoretical and Applied Mechanics will be held under the Presidentship of Dr. A. N. Khosla, Vice-Chancellor, University of Roorkee from December 23 to 26, 1959 at the University of Roorkee, Roorkee.

Research papers may be contributed on any of the following topics:

1. Elasticity — Plasticity — Rheology,
2. Fluid Mechanics (Aerodynamics — Hydrodynamics),
3. Mechanics of Solids (Ballistics — Vibration — Friction — Lubrication),
4. Statistical Mechanics — Thermodynamics — Heat Transfer,
5. Mathematics of Physics, Statistics and Computation,
6. Experimental Techniques.

They should reach the Secretary-Treasurer with three copies of their abstracts before October 15, 1959.

There will be invited addresses of one-half hour each on special topics.

The Registration Fee for the Congress is Rs. 10.00 which should be sent to the Secretary-Treasurer at Kharagpur. Board and Lodging arrangements for Members and Delegates will be made in the Hostels of the University of Roorkee, Roorkee. Like last year, Railway Concession in the form of single fare for two journeys will be available to all Members and Delegates.

The Fifth Congress will be preceded by a Symposium on 'Non-linear Physical Problems' under the joint sponsorship of the Indian Society of Theoretical and Applied Mechanics and UNESCO on December 21 and 22, 1959. Invitations are being extended to foreign and Indian participants. The travel expenses of invited Indian participants whose expenses are not covered by other sources may be assisted by UNESCO.

Any further information may be obtained from the Secretary, INDIAN SOCIETY OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS, Indian Institute of Technology, Kharagpur, India, or from the Director, UNESCO, South Asia Science Co-operation Office, 21, Curzon Road, New Delhi-1, India.

B. R. Seth
Secretary-Treasurer

Zuschrift an den Herausgeber

Zu W. Barth, Ein Iterationsverfahren zur Approximation durch Polynome. ZAMM 38 (1958), S. 258—260.

Eine Zuschrift von J. W. Wrench Jr. und F. D. Murnaghan, Washington, machte mich darauf aufmerksam, daß die Zahlen im Beispiel auf Seite 259 nicht auf die volle Stellenzahl genau sind. Bei diesem Zahlenbeispiel habe ich versehentlich nicht erwähnt, daß nur die diskreten Werte der Funktion $y = \lg x$ mit den Abszissen $x = (1 + n \cdot 0,02) \cdot \sqrt{10}$ für $n = 1, 2, 3, \dots, 108$ und $x = 10$ approximiert werden. Für diese Approximation sind die Werte $\text{Max } |\varepsilon(x_m)|$ und $\text{Min } |\varepsilon(x_m)|$ auf 10 Dezimalen nach dem Komma genau. Hingegen erhält man für die Funktion $y = \lg x$ mit der kontinuierlichen Variablen x im angegebenen Bereich nur näherungsweise eine Approximation im Sinne von Tschetscheff. Jedoch ist diese Approximation trotz der relativ geringen Zahl von Tabellenpunkten sehr gut. In der erwähnten Zuschrift wurden für $N = 2$ und für die hierzu von mir berechneten Koeffizienten die genauen Zahlen $\text{Max } |\varepsilon(x_m)| = 0,0000337414$ und $\text{Min } |\varepsilon(x_m)| = 0,0000337048$ angegeben.

Außerdem weisen J. W. Wrench Jr. und F. D. Murnaghan darauf hin, daß die von mir angegebenen Koeffizienten wesentlich von den exakten Werten abweichen. Nun wirken sich kleine Ungenauigkeiten in der Fehlerkurve stark auf die Koeffizienten aus, wie das folgende Beispiel zeigt. Addiert man zu dem Ergebnis der Rechnung ein Polynom mit den Koeffizienten

$$c_1^* = 10 \cdot 10^{-10}, c_3^* = -143 \cdot 10^{-10}, c_6^* = 423 \cdot 10^{-10},$$

so ergeben sich bei der Fehlerkurve nur Änderungen von ungefähr $1 \cdot 10^{-10}$. So ist zu erklären, daß die von mir angegebenen Koeffizienten bei $N = 2$ schon in der fünften Stelle nach dem Komma von den exakten Werten abweichen, während die Fehlerkurve erst Ungenauigkeiten in der achten Stelle aufweist. Hieraus darf man natürlich nicht den Schluß ziehen, die Koeffizienten müßten nur auf fünf Stellen genau angegeben werden.

Darmstadt

W. Barth

Druckfehlerberichtigung

Zu E. Mewes, Zusammenhang zwischen Kolbenweg und Kurbelwinkel bei Kurbelschleifen, ZAMM 38 (1958), S. 408, Formel (36):

Die eckige Klammer beim Koeffizienten a_2 lautet

$$\left[\binom{4}{1} + \frac{7 \cdot 9}{10 \cdot 12} \frac{1}{4} \alpha^2 \left\{ \binom{6}{2} + \dots \right\} \right],$$

der Koeffizient auf der letzten Formelzeile heißt a_4 .

Zu O. Emersleben, Über die Parallelströmung zäher Flüssigkeiten ..., ZAMM 38 (1958), S. 470:

In der zweiten und dritten Formelzeile lauten die Zähler auf dem langen Bruchstrich

$$(R^2 - R_i^2) \log r^2 + R_i^2 \log R^2 - R^2 \log R_i^2,$$

bzw.

$$(R^2 - R_i^2) \log R^2 + R_i^2 \log R^2 - R^2 \log R_i^2.$$